

REGELUNGSTECHNIK ZUR MAGNETSCHWEBEKUGEL

vorgelegt von
Ingo Herwig

angefertigt am
Institut für Angewandte Physik
der
Johann Wolfgang Goethe Universität
Frankfurt am Main

1 EINLEITUNG	4
2 EINFÜHRUNG IN DIE REGELUNGSTECHNIK.....	5
2.1 BEGRIFFSKLÄRUNG	5
2.1.1 <i>Steuerung</i>	6
2.1.2 <i>Regelung</i>	7
2.2 DER REGELKREIS	7
2.2.1 <i>Aufbau des Standardregelkreises</i>	7
2.2.2 <i>Übersicht über Regelungstypen</i>	8
2.3 ÜBERTRAGUNGSGLIEDER	9
2.3.1 <i>Klassifizierung von Übertragungsgliedern</i>	10
2.3.2 <i>Beschreibung des Übertragungsverhaltens</i>	11
Beschreibung im Zeitbereich	11
Mathematisches Modell.....	11
Kennfunktionen.....	12
Kennwerte im Zeitbereich.....	14
Beschreibung im Frequenzbereich.....	14
Lapacetransformation	15
Übertragungsfunktion	15
Zusammenhang mit den Kennfunktionen	16
Frequenzgang.....	16
Graphische Darstellung des Frequenzganges.....	17
Kennwerte im Frequenzbereich	18
Inverse Lapacetransformation.....	19
2.3.3 <i>Stationäres Verhalten der Übertragungsglieder</i>	20
2.3.4 <i>Wichtige Übertragungsglieder</i>	21
P-Glied	21
I-Glied	22
D-Glied / DT ₁ -Glied	23
Zusammengesetzte Übertragungsglieder	26
PT ₁ -Glied	26
PID-Regler	28
2.3.5 <i>Übertragungsverhalten des Regelkreises</i>	29
Stationäres Verhalten des Regelkreises	30
2.4 STABILITÄT	31
2.4.1 <i>Das Hurwitz-Kriterium</i>	33
2.4.2 <i>Rückkopplung und Stabilität</i>	33
2.5 ENTWURF EINER REGELUNG.....	34
2.5.1 <i>Forderungen an eine Regelung</i>	35
2.5.2 <i>Stabilisierung einer instabilen Strecke</i>	36

3 VERSUCH MAGNETSCHWEBEKUGEL.....	37
3.1 FUNKTIONSWEISE DER REGELUNG	37
3.2 SPULE-KUGEL-SYSTEM.....	38
3.2.1 Bezeichnungen	38
3.2.2 Überlegungen zum Systemverhalten.....	39
Stabilität im magnetischen Feld.....	39
Die Induktivität der Spule	42
Kraft auf die Kugel	46
3.2.3 Übertragungsfunktion des Systems.....	47
Zusammenhang zwischen Kugelposition und Spulenstrom	48
Zusammenhang zwischen Induktivität und Kugelposition	50
Übertragungsfunktion	50
3.3 REGELUNG	52
3.3.1 Aufbau des Regelkreises	52
3.3.2 Übertragungsfunktionen der Regelkreiskomponenten.....	54
Stellglied	54
Induktivitätsmessung	54
3.3.3 Reglerentwurf.....	58
Verkürzter offener Kreis	58
P-Regler	59
PDT ₁ -Regler.....	59
PI-PDT ₁ -Regler	61
PIDT ₁ -Regler	62
PI-PDT ₁ -Regler mit getrenntem Sollwertkanal	63
3.3.4 Abschließende Betrachtungen.....	65
Berücksichtigung einer verzögernden Wirkung.....	65
Berücksichtigung von Störungen der Kugelposition	66
Änderung der Systemparameter	67
4 ERGEBNIS.....	70
5 ANHANG.....	71
5.1 MATHEMATICA-RECHNUNGEN	71
5.1.1 Bode-Diagramm und Sprungantwort.....	71
5.1.2 Stabilität im Spulenrandfeld	72
5.1.3 Induktivität der Spule und Kraft auf die Kugel.....	73
5.1.4 Systemparameter.....	74
5.1.5 Hurwitz-Kriterium	75
5.1.6 Regelkreissimulation.....	76
5.2 LITERATUR.....	78

Einleitung

Mit zunehmender Automatisierung - sowohl der industriellen Herstellungsverfahren, als auch ihrer Produkte - hat die Regelungstechnik stark an Bedeutung gewonnen.

Das Prinzip der Regelung jedoch ist schon lange bekannt. Erste Anwendungen finden sich bereits in der Antike (230 v.Chr. Philon von Byzanz, Schwimmerregelung für Öllampen). Das wohl prominenteste Beispiel ist der Drehzahlregler für Dampfmaschinen, den James Watt 1788 konstruierte. Eine Theorie des Regelkreises wurde dagegen erst Ende des letzten Jahrhunderts entwickelt. Damit war der Weg für den verbreiteten Einsatz von Regelungstechnik geebnet.

Aber ihre Bedeutung geht über die rein technischen Prozesse hinaus, indem sich die Theorie der Regelkreise auch zur Untersuchung nichttechnischer zum Beispiel biologischer oder gesellschaftlicher Prozesse anwenden läßt. Viele dieser Prozesse laufen nach dem Prinzip der Regelung ab, denn sie werden auch bei Wirkung äußerer Störungen aufrechterhalten. In diesen Bereichen wird allgemeiner von Kybernetik gesprochen [Steinbuch].

Im ersten Teil der vorliegenden Arbeit wird eine Einführung in die Regelungstechnik gegeben.

Daran schließen sich im zweiten Teil Untersuchungen zur *Magnetschwebekugel* an. Diese theoretischen Betrachtungen sollen als Grundlage für den Aufbau eines Experiments zur Magnetschwebekugel dienen, das im Rahmen des *Physikalischen Praktikums für Fortgeschrittene* des *Instituts für Angewandte Physik an der Universität Frankfurt* geplant ist. Anhand einer von einem Elektromagneten in der Schwebelage gehaltenen Kugel werden sich die Teilnehmer und Teilnehmerinnen mit den Prinzipien der Regelungstechnik vertraut machen können.

Dieser Versuch ist in zweierlei Hinsicht interessant.

Das System Elektromagnet - Kugel ist ohne Regelung nicht stabil, das heißt die Kugel kann nicht an einem beliebigen Ort unterhalb des Magneten fixiert werden. Dies entspricht auch der Erfahrung. Um so erstaunlicher ist es, wenn der Versuch zu einer Stabilisierung führt.

Die verwendeten Methoden entstammen vollständig der Theorie der linearen Regelungen, sodaß der Versuch als elementare Einführung in die Regelungstechnik verstanden werden kann.

Einführung in die Regelungstechnik

In diesem Kapitel wird eine Einführung in die Theorie linearer Regelungen gegeben. Dazu ist zunächst zu klären, was unter Regelungen - speziell linearen - zu verstehen ist und wofür sie eingesetzt werden.

Zur weiteren Behandlung wird es nötig sein, einige Begriffe einzuführen, die Signale und Komponenten einer Regelung bezeichnen. Eine übersichtliche Darstellung bietet das Blockschaltbild.

Am Anfang eines Regelungsentwurfs steht immer das zu regelnde System, dessen Verhalten anhand eines Modells beschrieben werden muß. Möglichkeiten dies zu tun werden wir im Zeit- und Frequenzbereich kennenlernen.

Mit einer solchen Beschreibung lassen sich Stabilitätskriterien und Reglerentwurfsmethoden ableiten.

Begriffsklärung

Regelungstechnik findet dort Anwendung, wo dynamische Systeme gezielt beeinflusst werden sollen.

Systeme sind Funktionseinheiten zur Verarbeitung und Übertragung von Signalen [Unbehauen, S.1]. Ihre Verbindung zur Umgebung wird durch Eingangs- und Ausgangsgrößen hergestellt. Je nach Aufgabenstellung interessieren von diesen nur bestimmte. Für die Regelungstechnik naheliegend ist die Verwendung von solchen, die physikalisch interpretierbar sind. In diesem Sinne kann das System über die *Eingangsgröße* $u(t)$ tatsächlich von außen beeinflusst werden. Sie ist die Ursache für Vorgänge im System. Die (meßbare) *Ausgangsgröße* $x(t)$ beschreibt die Reaktion des Systems auf die Eingangsgröße (Systemantwort). Wenn die Größen zeitveränderlich sind, spricht man von *dynamischen* Systemen. Die Zeitverläufe dieser Größen werden hier als *Signale* bezeichnet (Eingangs- und Ausgangssignale).

Die gezielte Beeinflussung des Systems läßt sich demnach folgendermaßen fassen:

Der interessierende Ausgangsgröße, die in unserem Fall *Regelgröße* x genannt wird, soll einem gewünschten Zeitverlauf folgen. Dieser ist im Verlauf der sogenannten *Führungsgröße* w vorgegeben. Deshalb soll gelten:

$$x(t) = w(t) \quad (0.1)$$

Die spezielle Eingangsgröße, über die die Beeinflussung des Systems erfolgt, bezeichnet man als *Stellgröße* y . Die Berechnung der erforderlichen Stellgrößenwerte erfolgt in einer Einrichtung, die dem System vorgeschaltet wird. Es ist verständlich, daß in die Berechnung der Verlauf der Führungsgröße eingehen muß. Außerdem hängt das Bildungsgesetz der Stellgröße entscheidend vom Verhalten des Systems selbst ab, denn dieses stellt den Zusammenhang zwischen Regelgröße und Stellgröße her.

Zu beachten ist weiterhin, daß das System - außer den gewollten - weiteren Einflüssen unterliegt, die hier unter der Bezeichnung *Störgröße* z zusammengefaßt werden. Diese Größe ist jedoch in der Regel nicht vollständig bekannt, sowohl in Bezug auf die Zahl der Einzeleinflüsse als auch deren Zeitverläufe. Trotzdem muß ihr Einfluß auf die Ausgangsgröße des Systems kompensiert werden.

Das Verfahren stellt sich im Blockschaltbild¹ folgendermaßen dar:

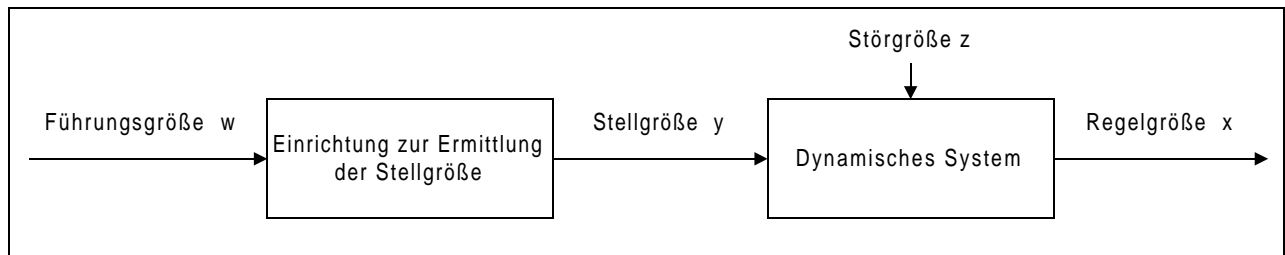


Abbildung 1 Grundprinzip der Beeinflussung von Systemen

Der Begriff des Systems ist sehr weit gefaßt und nicht auf den technischen Bereich beschränkt. Beispiele für Systeme und Regelungen aus den verschiedensten Fachgebieten finden sich in [Steinbuch]. Voraussetzung für die Behandlung mit regelungstechnischen Methoden (z.B. Stabilitätsuntersuchungen) ist allein eine mathematische Beschreibung des Systems. Inwiefern sich die Ergebnisse anschließend auf das reale System übertragen lassen hängt von der Qualität dieses mathematischen Modells ab.

Für die weitere Betrachtung interessieren folgende Fragen:

1. Wie hängt die zu beeinflussende Ausgangsgröße des Systems von dessen Eingangsgrößen ab? Dieser Frage gehen wir in Abschnitt 0 nach.
2. Müssen Störeinflüsse berücksichtigt werden?
3. Mit welcher Art Einrichtung läßt sich die gewünschte Beeinflussung erzielen?

Diese Fragen dienen der groben Orientierung. Zu einer detaillierteren Darstellung der Vorgehensweise bei der Lösung eines regelungstechnischen Problems kommen wir in Abschnitt 0.

Anhand der Beantwortung der ersten beiden Fragen kann der Unterschied zwischen den Konzepten *Steuerung* und *Regelung* dargestellt werden:

Steuerung

Lassen sich die Zusammenhänge zwischen den Kenngrößen des Systems exakt beschreiben und sind die Störungen vernachlässigbar, so kann man auf das einfache Konzept der Steuerung zurückgreifen.

Die Funktionseinheit zur Beeinflussung des Systems wird in der sogenannten *Steuereinrichtung* realisiert. Sie ermittelt die Werte der Stellgröße so aus dem Verlauf der Führungsgröße, daß die Regelgröße diesen direkt annimmt. Da der Steuereinrichtung keine Information über den tatsächlichen Verlauf der Regelgröße vorliegt, kann dieses Verfahren nur bei vollständiger Kenntnis des Systems und Ausbleiben von Störungen erfolgreich sein.

¹ Das Blockschaltbild dient der graphischen Veranschaulichung der Systemstruktur.

Blöcke stellen abgegrenzte Funktionseinheiten dar, die über ihre Ein- und Ausgangsgrößen (u bzw. x) mit der Umgebung verbunden sind. Sie sind rückwirkungsfrei, das heißt $u(t) \neq f(x(t))$. Spezielle Blöcke sind zum Beispiel Verzweigungs- und Summationsstellen.

Pfeile bezeichnen die Ein- und Ausgangssignale der einzelnen Blöcke und stellen somit die Verbindung unter ihnen her. Sie haben eine eindeutige Wirkrichtung.

Regelung

Unterliegt das System jedoch nicht vorhersehbaren Schwankungen, ist es instabil oder muß mit äußeren Störungen gerechnet werden, ist eine Steuerung nicht geeignet. Denn es ist nicht vorauszusehen, ob sich die Regelgröße bei Änderung der Stellgröße in gewünschter Weise einstellt. Dem Problem kann nur entgegnet werden, indem die Regelgröße ständig gemessen und mit der Führungsgröße verglichen wird.

Zu diesem Zweck führt man die Regelgröße an ein Vergleichsglied, das die Differenz zur Führungsgröße ermittelt. Das Ergebnis bildet als Regelabweichung die Eingangsgröße der *Regeleinrichtung*. Sie erhält daher sowohl Informationen über die Führungsgröße als auch das Systemverhalten beziehungsweise Störungen.

Im Gegensatz zur Steuerung liegt hier ein geschlossener Wirkungsablauf mit laufender Rückmeldung vor, den man als *Regelung* bezeichnet. Das System wird häufig auch *Regelstrecke* genannt.

Die Rückführung mit Vorzeichenumkehr heißt *Gegenkopplung* und ist wesentliches Merkmal der Regelung. Sie wird in Abschnitt 0 genauer behandelt.

Abbildung 2 zeigt das Blockschaltbild einer Regelung:

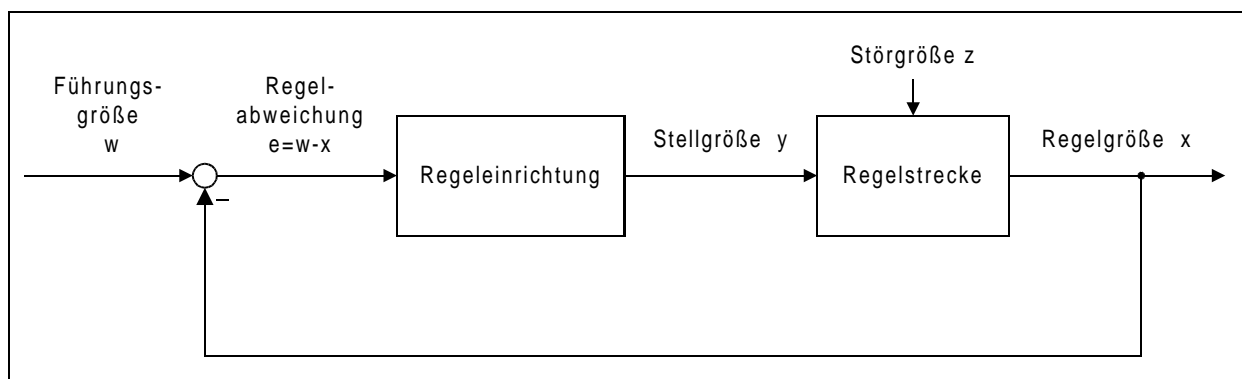


Abbildung 2 Struktur der Regelung

Der Regelkreis

Aufbau des Standardregelkreises

Für die Funktion einer Regelung sind drei Schritte wesentlich [Lunze]:

1. *Messen*: Die Regelgröße muß laufend gemessen, oder - falls sie nicht direkt zugänglich ist - aus anderen Meßgrößen berechnet werden. Je nach System sind die unterschiedlichsten Verfahren denkbar. Abbildung 2 ist dahingehend idealisiert, daß der *Istwert* der Regelgröße direkt zurückgeführt wird. Im Allgemeinen muß dieser jedoch gemessen werden (in dem Sinne, daß er auf eine in der Regeleinrichtung besser handhabbare Größe abgebildet wird). Damit sind auch die Eigenschaften des Meßgliedes einzubeziehen. Jedoch wird man dieses möglichst so entwerfen, daß die tatsächlich zurückgeführte Größe (*Rückführgröße r*) zum Istwert der Regelgröße proportional ist.
2. *Vergleichen*: Im Vergleichsglied, das meist im Regler lokalisiert ist, findet der für die Regelung charakteristische Soll-Istwert-Vergleich statt. Der Sollwert wird vom

Sollwerteinsteller in der Führungsgröße vorgegeben. Diese muß eine der Rückführgröße äquivalente Form haben (zum Beispiel Spannungen bei elektrischen Signalen).

3. *Stellen*: Die Regeleinrichtung ist in zwei weitere Funktionseinheiten zu unterteilen: Den eigentlichen Regler mit Regelglied und die Stelleinrichtung. In den meisten Fällen genügt es nicht, die Regeldifferenz direkt der Strecke zuzuführen, um einen gewünschten Verlauf der Regelgröße zu erhalten. Die nötige Korrektur wird dann vom Regelglied vorgenommen und in der *Reglerausgangsgröße* u bereitgestellt. Da sich diese im Allgemeinen nicht auf dem Leistungsniveau der Regelstrecke befindet (sondern auf dem der Rückführgröße), findet eine Leistungsanpassung in der Stelleinrichtung statt. Diese vollzieht die tatsächliche Einwirkung auf die Regelstrecke.

Damit erhält man folgenden detaillierteren Aufbau:

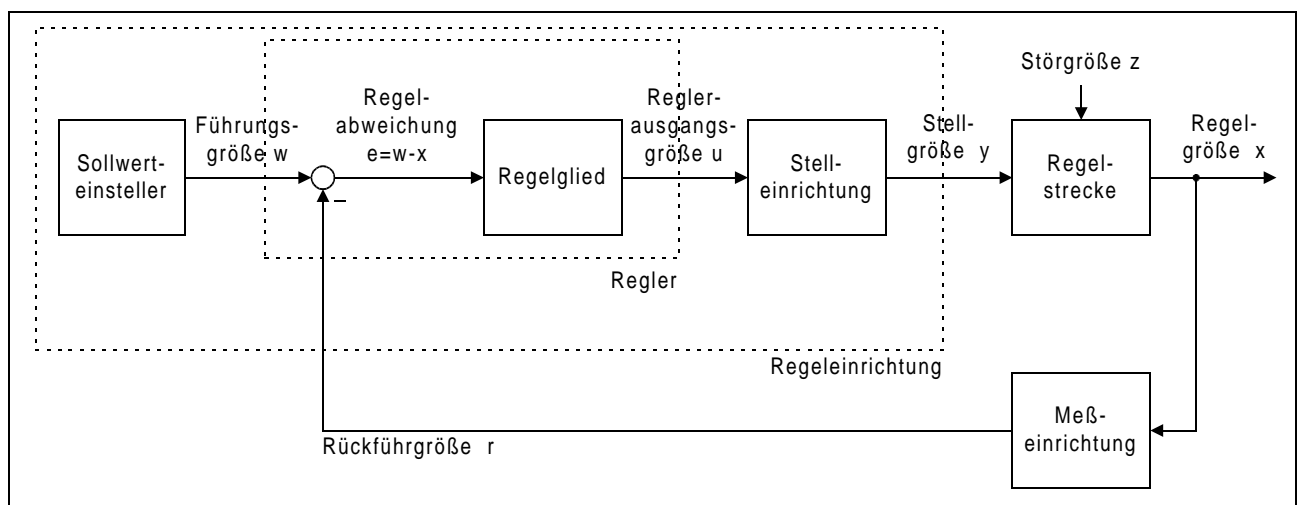


Abbildung 3 Komponenten eines Regelkreises

Übersicht über Regelungstypen

Im Folgenden soll eine (keinesfalls vollständige) Übersicht über die verschiedenen Regelungstypen gegeben werden. Dabei sind jeweils Merkmale zur Unterscheidung gegeben, wobei eine Regelung mehrere davon in sich vereinigen kann.

Die zentrale Forderung an die Regelgröße besteht darin, daß sie den Verlauf der Führungsgröße annehmen soll auch bei Einwirkung von Störgrößen. Soll sie sich auf einen festen Sollwert ($w = \text{const.}$) einstellen, spricht man von *Festwertregelungen* (zum Beispiel Drehzahlregelung über Fliehkraftpendel). *Nachlauf-* oder *Folgeregelungen* liegen bei einer sich zeitlich ändernden Führungsgröße vor.

Ein weiteres Merkmal ist die Arbeitsweise des Stellgliedes. Hier unterscheiden man *stetige* und *unstetige Regelungen*. Während bei ersteren die Stellgröße kontinuierliche Werte annehmen kann, erfolgt das Stellen bei letzteren in Stufen. Hierunter fallen Zweipunkt- und Dreipunktregelungen. Als Zweipunktregelung ist zum Beispiel die Temperaturregelung allein durch Ein- und Ausschalten der Heizung zu verstehen. In dieser Arbeit werden stetige Stellgrößen vorausgesetzt.

Mit der gestiegenen Leistungsfähigkeit digitaler Rechenanlagen haben sich *digitale Regelungen* stark verbreitet. Im Gegensatz zu *analogen Regelungen* wird hier die Regelgröße

diskretisiert. Soll-Istwert-Vergleich und Regelalgorithmus sind in einem Rechner realisiert. Der Vorteil ist, daß sich beliebige Algorithmen programmieren lassen. Wir werden uns hier jedoch auf analoge Verfahren beschränken.

Schließlich können die Regelungen noch in ihrem Zeitverhalten unterschieden werden. Dazu wird im folgenden Abschnitt einiges gesagt.

Übertragungsglieder

Bisher haben wir nur das Zusammenwirken der Blöcke im Blockschaltbild betrachtet. Dadurch sind Aussagen über die prinzipielle Funktionsweise einer Regelung möglich. Für den Entwurf einer solchen ist jedoch die Kenntnis der Zusammenhänge zwischen Eingangs- und Ausgangsgrößen in den Blöcken unerlässlich. Vom Standpunkt der Regelungstechnik gesehen, ist dieser Aspekt der Systeme der wesentliche.

Da die in den Blöcken dargestellten Systeme zwischen Eingangs- und Ausgangsgrößen vermitteln, werden sie auch *Übertragungsglieder* genannt.

Ein Übertragungsglied hat im Blockschaltbild folgende Darstellung:

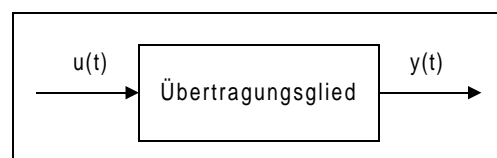


Abbildung 4 Allgemeines Übertragungsglied

Zu beachten ist, daß das in Abbildung 4 dargestellte Übertragungsglied nur eine Eingangs- und eine Ausgangsgröße besitzt. Diese Einschränkung wird hier der Einfachheit halber gemacht. Im Allgemeinfall liegen mehrere Eingangs- und Ausgangsgrößen vor (siehe Mehrgrößenregelungen z.B. [Föllinger]). Jedoch wird man stets bestrebt sein, das Systemmodell derart zu vereinfachen, daß die Anzahl dieser Größen reduziert wird. Für unsere Untersuchungen ist oben dargestellter Fall ausreichend, denn bei den hier betrachteten linearen Übertragungsgliedern lassen sich solche mit mehreren Ein- und Ausgangsgrößen als Überlagerung von solchen mit jeweils einer behandeln [Föllinger S.57].

Im Weiteren wird - solange es sich nicht um spezielle Übertragungsglieder im Regelkreis handelt - die Eingangsgröße $u(t)$ und die Ausgangsgröße $y(t)$ genannt.

Ziel der nachfolgenden Betrachtungen ist eine mathematische Beschreibung der Übertragungsglieder.

Bevor damit begonnen wird, soll in Abschnitt 0 eine Eingrenzung auf in diesem Rahmen beschriebene Übertragungsglieder gegeben werden. Mit Kenntnis der Beschreibungsmethoden des Übertragungsverhaltens (Abschnitt 0) werden in Abschnitt 0 wichtige Vertreter von Übertragungsgliedern vorgestellt.

Das Übertragungsverhalten des gesamten Regelkreises ist Thema des Abschnitts 0.

Klassifizierung von Übertragungsgliedern

Bei der Klassifizierung der Übertragungsglieder (nach [Föllinger]) wird davon ausgegangen, daß die Beziehung zwischen Eingangs- und Ausgangsgröße durch einen Operator φ beschrieben werden kann:

$$y(t) = \varphi\{u(t)\} \quad (0.2)$$

Nach den Eigenschaften dieses Operators wird die folgende Einteilung vorgenommen.

Linearität

Die Übertragungsglieder zerfallen in zwei große Gruppen, die der linearen Glieder und die der nichtlinearen.

Ein *linearer Operator* erfüllt zwei Bedingungen:

1. Für zwei beliebige Eingangssignale $u(t)$ und $\tilde{u}(t)$ und die zugehörigen Ausgangssignale $y(t) = \varphi\{u(t)\}$ und $\tilde{y}(t) = \varphi\{\tilde{u}(t)\}$ gilt das *Superpositionsprinzip*:

$$\varphi\{u(t) + \tilde{u}(t)\} = \varphi\{u(t)\} + \varphi\{\tilde{u}(t)\} \quad (0.3)$$

(Für das Gesamtergebnis spielt es keine Rolle, ob die einzelnen Eingangssignale überlagert werden oder die Antworten auf diese (siehe Beschreibung im Frequenzbereich, Abschnitt 0)).

2. Für ein beliebiges Eingangssignal $u(t)$ und eine beliebige Konstante c gilt:

$$\varphi\{c \cdot u(t)\} = c \cdot \varphi\{u(t)\} \quad (0.4)$$

Diese Linearitätseigenschaften bleiben erhalten, wenn lineare Übertragungsglieder hintereinander geschaltet werden, das heißt die Ausgangsgröße des einen Gliedes die Eingangsgröße des nächsten ist.

In vielen Fällen genügt es für den Entwurf einer Regelung, ein nichtlineares Systemverhalten durch ein um einen Arbeitspunkt linearisiertes zu beschreiben.

Zeitinvarianz

Anhand eines weiteren Prinzips können die linearen Übertragungsglieder in zwei weitere Gruppen zerlegt werden, die der zeitinvarianten und die der zeitvarianten Übertragungsglieder.

Für einen *zeitinvarianten Operator* gilt bei beliebigem Eingangssignal $u(t)$ und für alle Zeitpunkte $t_0 > 0$ das *Verschiebungsprinzip*:

$$\varphi\{u(t - t_0)\} = y(t - t_0) \quad (0.5)$$

Das bedeutet, daß ein zeitinvarianter Operator bei Verschiebung des Eingangssignals um ein Intervall t_0 das zugehörige Ausgangssignal um dasselbe Intervall verschiebt.

Es kann gezeigt werden, daß Zeitinvarianz und Linearität genau dann erfüllt sind, wenn sich ein Übertragungsglied durch die komplexe Übertragungsgleichung

$$Y(p) = G(p) \cdot U(p) \quad (0.6)$$

beschreiben läßt [Föllinger, S.58f]. Auf diese, für die klassische Regelungstechnik überaus wichtige Gleichung, kommen wir in Abschnitt 0 zurück.

Im Weiteren soll davon ausgegangen werden, daß die betrachteten Übertragungsglieder sowohl linear als auch zeitinvariant sind. Von dieser Klasse der Übertragungsglieder soll auch nur die wichtige Gruppe derer mit rationaler Übertragungsfunktion behandelt werden. Das bedeutet, daß zum Beispiel Totzeitsysteme (bei denen die Systemreaktion nach einer Totzeit einsetzt) aus der Betrachtung ausgeschlossen sind.

Beschreibung des Übertragungsverhaltens

Für quantitative Überlegungen zum Systemverhalten ist eine vollständige mathematische Darstellung des Übertragungsverhaltens nötig. Aus dieser kann für jeden Zeitpunkt das Ausgangssignal in Abhängigkeit vom Eingangssignal berechnet werden.

Die Beschreibung des Systemverhaltens kann demnach auch zur Beantwortung der für die Regelungstechnik besonders wichtigen Fragen nach Stabilität (Abschnitt 0) und stationärem Verhalten des Systems (Abschnitt 0) dienen. Daneben lassen sich Kennwerte ermitteln, die beim Entwurf der Regelung eine Rolle spielen.

Zur experimentellen Untersuchung des Übertragungsverhaltens wird das System mit Testfunktionen angeregt und das Ausgangssignal gemessen.

Beschreibung im Zeitbereich

Mathematisches Modell

Der erste Schritt bei der Beschreibung eines Systems besteht in der Abgrenzung desselben von seiner Umgebung und der Definition der Größen, über die es mit dieser Umgebung verbunden ist, den Eingangs- und Ausgangsgrößen. Das mathematische Modell soll das System möglichst vollständig - auch im Sinne von exakt - beschreiben. Dabei sollte es aber gleichzeitig für die weitere Behandlung nicht zu kompliziert sein.

Das mathematische Modell wird aus den physikalischen Gesetzen, die die einzelnen Vorgänge innerhalb des System beschreiben, zusammengesetzt. Das Ergebnis läßt sich in Form einer Differentialgleichung darstellen. In dieser sind die Eingangsgrößen die unabhängigen und die Ausgangsgrößen die abhängigen Veränderlichen.

Die Differentialgleichungen sollen folgende Eigenschaften besitzen:

1. Da die hier betrachteten Systeme aus endlich vielen idealisierten Einzelelementen zusammengesetzt sind (konzentrierte Parameter), ergeben sich *gewöhnliche* Differentialgleichungen, das heißt die Veränderlichen hängen nur von einer Größe (bei dynamischen Systemen der Zeit) ab.
2. Aus der Linearität der Übertragungsglieder folgen *lineare* Differentialgleichungen, das heißt es tauchen keine Produkte von Eingangs- und Ausgangsgrößen auf.

3. Zeitinvariante Übertragungsglieder führen auf Differentialgleichungen mit *konstanten Koeffizienten* bei Eingangs- und Ausgangsgrößen. Diese Koeffizienten sind *reell*.
4. Sind im System getrennte Energiespeicher vorhanden, so entspricht die *Ordnung* der Differentialgleichung der Anzahl derselben. So wird ein elektrischer Schwingkreis mit Spule und Kondensator durch eine Differentialgleichung zweiter Ordnung beschrieben.
5. Keine der Zeitfunktionen soll eine gegenüber den anderen verschobene Zeitabhängigkeit (z.B. $y(t-T)$) besitzen (keine Totzeitsysteme).

Die Differentialgleichung besitzt demnach folgende allgemeine Form:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t) \quad (0.7)$$

Sie beschreibt eindeutig den Zusammenhang zwischen gegebener Eingangsgröße $u(t)$ und gesuchter Ausgangsgröße $y(t)$, falls Anfangsbedingungen für $y(t)$ und seine Ableitungen gegeben sind. Meist werden sie wie folgt festgelegt:

$$y(t < 0) = 0, \quad \dot{y}(t < 0) = 0 \quad \dots \quad (0.8)$$

Bei geeigneter Wahl des Nullpunktes kann dies für reale Systeme angenommen werden (Systeme ohne Vorgeschichte beziehungsweise Einschalten bei $t = 0$).

Weiterhin wird vorausgesetzt, daß immer $n \geq m$ gilt, was nichts anderes bedeutet, als daß sich Übertragungsglieder mit ideal differenzierendem Verhalten physikalisch nicht realisieren lassen [Unbehauen, S.80f].

Die Gleichungen (0.7) und (0.8) sind Ausgangspunkt der weiteren Betrachtungen.²

Kennfunktionen

Oft wird das dynamische Verhalten eines Systems durch Kennfunktionen dargestellt. Sie beschreiben den Verlauf der Ausgangsgröße (Systemantwort) als Reaktion auf ein bestimmtes Eingangssignal (Testfunktion). Aus der graphischen Wiedergabe läßt sich das Systemverhalten schnell qualitativ beurteilen.

Als Beispiel soll hier die Übergangsfunktion vorgestellt werden; um nicht zuviel Aufwand zu treiben anhand eines Systems zweiter Ordnung, wie es beispielsweise durch einen Reihenschwingkreis mit Kondensator, Spule und ohmschem Widerstand realisiert werden kann. Ein solches System läßt sich mit folgender Differentialgleichung³ beschreiben:

$$\ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t) \quad (0.9)$$

² Die häufig gebrauchte *Zustandsraumdarstellung* geht im Wesentlichen auf eine Umwandlung der Differentialgleichung n -ter Ordnung in ein System von n gekoppelten Differentialgleichungen erster Ordnung zurück; siehe z.B.[Lunze].

³ Auf der rechten Seite können, je nach dem was als Ausgangsgröße definiert wird, auch Ableitungen der Eingangsgröße auftauchen.

Die Bedeutung dieses Beispiels liegt darin, daß viele Systeme höherer Ordnung durch diesen einfachsten Fall eines schwingungsfähigen Systems angenähert werden können.

Zur Ermittlung der *Übergangsfunktion* $h(t)$ wird das System durch ein sprungförmiges Eingangssignal angeregt. Deshalb wird das Ausgangssignal auch *Sprungantwort* genannt.

Ein sprungförmiges Eingangssignal hat die allgemeine Form

$$u(t) = u_0 \cdot \sigma(t) \quad (0.10)$$

wobei $\sigma(t)$ der Einheitssprung ist:

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases} \quad (0.11)$$

Die Übergangsfunktion ist definiert als die auf die Sprunghöhe bezogene Sprungantwort.

$$h(t) = \frac{1}{u_0} y(t) = \frac{1}{u_0} \varphi\{u_0 \sigma(t)\} = \varphi\{\sigma(t)\} \quad (0.12)$$

Sie stellt daher die Reaktion des Systems auf den Einheitssprung dar.

Für das Beispielsystem (0.9) ergibt sich

$$h(t) = c_1 \cdot e^{\frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2} t} + c_2 \cdot e^{\frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2} t} + \frac{b_0}{a_0} \quad (0.13)$$

als Übergangsfunktion. Abhängig von den Koeffizienten der Differentialgleichung verläuft sie periodisch oder aperiodisch und dabei exponentiell aufklingend, abklingend oder mit konstanter Amplitude.

Die Sprungantwort spielt in der Praxis die größte Rolle, da das Testsignal einfach zu erzeugen ist (z.B. durch Aufschalten einer Gleichspannung).

Ein weiteres Testsignal ist der δ -Impuls, der zur *Gewichtsfunktion* $g(t)$ (δ -Impulsantwort) führt. In der Praxis wird er durch einen schmalen Rechteckimpuls angenähert. Diese Funktion spielt in der Stabilitätsdefinition eine Rolle.

Für Übertragungsglieder mit differenzierendem Verhalten ist als Testsignal eine Rampenfunktion (*Anstiegsantwort*) sinnvoll, da sie nicht zu unerwünschten Signalüberhöhungen führt.

Aus den Kennfunktionen kann auf gewisse Parameter des untersuchten Übertragungsgliedes geschlossen werden, die beim Entwurf der Regelung eine Rolle spielen.

Kennwerte im Zeitbereich

Die für den Einschwingvorgang bedeutsamen Kennwerte sind in Abbildung 5 dargestellt.

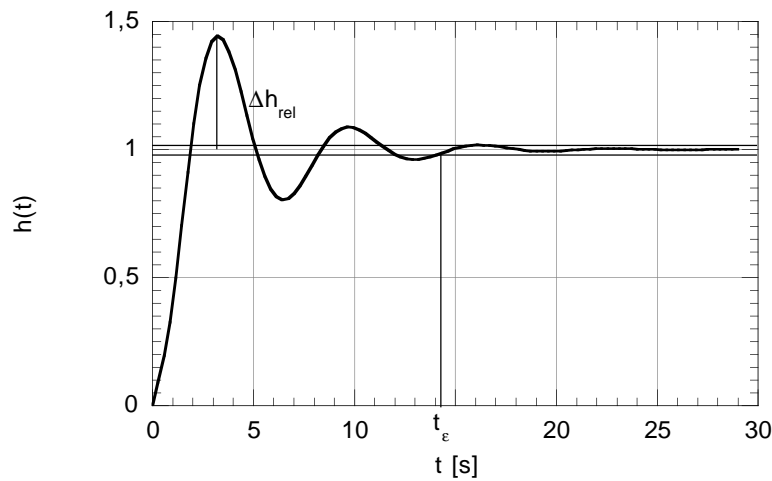


Abbildung 5 Kennwerte im Zeitbereich

Die *maximale relative Überschwingweite*

$$\Delta h_{rel} = \frac{h_{max} - h_{\infty}}{h_{\infty}} \quad (0.14)$$

hängt nur vom Dämpfungsgrad ab und fällt bei Erhöhung desselben.

Die *Ausregelzeit* t_{ϵ} kann als geeignetes Maß für die Schnelligkeit des Ausgleichvorgangs angesehen werden. Denn sie ist als der Zeitpunkt definiert, in dem die Ausgangsgröße in einen 5%-Streifen um den stationären Wert eintritt und diesen anschließend nicht mehr verläßt. Es gilt demnach

$$0.95 \cdot h_{\infty} \leq h(t \geq t_{\epsilon}) \leq 1.05 \cdot h_{\infty} \quad (0.15)$$

Im Allgemeinen klingt die Schwingung umso langsamer ab, je kleiner die Dämpfung ist.

Beschreibung im Frequenzbereich

Mit der Differentialgleichung liegt eine vollständige Beschreibung des Zusammenhangs zwischen Eingangs- und Ausgangsgröße des Systems vor. Mitunter bereitet es jedoch Schwierigkeiten diese Gleichung direkt zu lösen, um die Systemantwort auf ein gegebenes Eingangssignal zu ermitteln. Deshalb wird oft die Lösung im Frequenzbereich der im Zeitbereich vorgezogen [Bronstein, S.451 ff].

Dazu werden die Eingangs- und Ausgangssignale mittels einer geeigneten Transformation in den Frequenzbereich überführt. Dadurch geht die Differentialgleichung in eine algebraische Gleichung über, deren Lösung sehr viel leichter fällt. Das System kann nun entweder im

Frequenzbereich oder nach Rücktransformation des Ergebnisses im Zeitbereich untersucht werden.

Die Eignung dieses Verfahrens für lineare Übertragungsglieder resultiert aus dem Superpositionsprinzip: Mit der Transformation wird die Zerlegung des Gesamtsignals in einzelne Elementarsignale ermittelt; im Fall eines periodischen Signals endlich, sonst unendlich viele. Die Systemantwort muß nun nicht für das gesamte Eingangssignal, sondern kann im Frequenzbereich leicht für jedes der Elementarsignale berechnet werden (z.B. komplexe Wechselstromrechnung [Clausert]). Bei der Rücktransformation findet anschließend eine Überlagerung der Einzelantworten zur gesamten Systemantwort statt.

Während im Zeitbereich die unabhängige Veränderliche die reelle Größe t ist, erhält man im Frequenzbereich eine komplexe Größe p , die von der Frequenz ω abhängt.

Laplacetransformation

Bei der Laplacetransformation [Bronstein, S.634 ff] stellt das einseitige Laplaceintegral

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \quad (0.16)$$

den Zusammenhang zwischen Laplacetransformierter $F(p)$ und der Zeitfunktion $f(t)$ her.⁴ Dabei ist

$$p = \delta + j\omega \quad (0.17)$$

die unabhängige Veränderliche im Frequenzbereich.

Die einseitige Transformation kann nur bei Signalen verwendet werden, für die $f(t < 0) = 0$ gilt. Diese Forderung kann bei Prozessen, die zu irgendeinem Zeitpunkt beginnen, durch Verschieben der Zeitachse immer erfüllt werden.

Die Laplacetransformation läßt sich wegen des konvergenzfördernden Faktors $\exp(-\delta t)$ bei sehr viel mehr Signalen einsetzen als die Fouriertransformation. Das und die vereinfachte Transformation mittels Tabellen erklären ihre verbreitete Anwendung.

Übertragungsfunktion

Für verschwindende Anfangswerte erzeugt die Laplacetransformation aus der Differentialgleichung (0.7) folgende Gleichung:

$$Y(p)(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0) = U(p)(b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0) \quad (0.18)$$

Die *Übertragungsfunktion* $G(p)$ ist definiert als Quotient der Laplacetransformierten von Ausgangs- und Eingangsgröße des Systems.

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} \quad (0.19)$$

⁴ Die Funktionen im Frequenzbereich werden im Gegensatz zu denen im Zeitbereich mit großen Buchstaben gekennzeichnet.

Die hier betrachteten Systeme besitzen demnach eine gebrochen rationale Übertragungsfunktion

$$G(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0} \quad (0.20)$$

Der Übertragungsfunktion kommt in der Regelungstechnik eine große Bedeutung zu, da sie eine vollständige Beschreibung des Systemverhaltens liefert, mit der leicht zu rechnen ist.

So läßt sich die Übertragungsfunktion *zusammengesetzter Übertragungsglieder* einfach aus denen der einzelnen Glieder ermitteln. Für Reihenschaltung ist das Produkt der einzelnen Übertragungsfunktionen zu bilden, weil die Ausgangsgröße des einen Gliedes die Eingangsgröße des nächsten darstellt. Bei einer Parallelschaltung müssen die Übertragungsfunktionen addiert werden.

Zu einem beliebigen (laplacetransformierbaren) Eingangssignal läßt sich mit Kenntnis der Übertragungsfunktion und Gleichung (0.19) auf einfache Weise das Ausgangssignal ermitteln.

Zusammenhang mit den Kennfunktionen

Da die Laplacetransformierte des δ -Impulses gerade eins ist [Föllinger, S.600], folgt mit Gleichung (0.19), daß das zur Impulsanregung gehörige Ausgangssignal der Rücktransformierten der Übertragungsfunktion entspricht.

$$G(p) \mapsto g(t) \quad (0.21)$$

Die Gewichtsfunktion $g(t)$ läßt sich somit leicht aus dem Frequenzbereich berechnen. Gleiches gilt für die Übergangsfunktion. Weil die Sprungfunktion aus einer Integration des Deltaimpulses hervorgeht und es sich um lineare Systeme handelt, muß die Übergangsfunktion aus der Gewichtsfunktion ebenfalls durch Integration folgen. Im Frequenzbereich bedeutet das - unter Berücksichtigung des Integrationssatzes der Laplacetransformation [Bronstein, S.634]

$$\frac{1}{p} G(p) \mapsto h(t) \quad (0.22)$$

Frequenzgang

Sinusförmige, reelle Signale

$$u(t) = \hat{u} \cos(\omega t + \varphi_u) \quad (0.23)$$

können mit der Beziehung

$$u(t) = \operatorname{Re}\{\hat{u} e^{i(\omega t + \varphi_u)}\} = \operatorname{Re}\{U e^{i\omega t}\} = \operatorname{Re}\{\underline{u}(t)\} \quad (0.24)$$

in komplexe Signale $\underline{u}(t)$ mit der *komplexen Amplitude* $U = \hat{u} \exp(i\varphi_u)$ transformiert werden.

Da sich bei linearen Systemen ein sinusförmiges Ausgangssignal

$$y(t) = \hat{y} \cos(\omega t + \varphi_y) \quad (0.25)$$

gleicher Frequenz ergibt, geht die Differentialgleichung (0.7) in die algebraische Gleichung

$$Y(a_n(i\omega)^n + \dots + a_1 i\omega + a_0) = U(b_m(i\omega)^m + \dots + b_1 i\omega + b_0) \quad (0.26)$$

über. Der Quotient

$$G(i\omega) = \frac{Y}{U} = \frac{b_m(i\omega)^m + b_{m-1}(i\omega)^{m-1} + \dots + b_1(i\omega) + b_0}{a_n(i\omega)^n + a_{n-1}(i\omega)^{n-1} + \dots + a_1(i\omega) + a_0} \quad (0.27)$$

wird *Frequenzgang* des Systems genannt. Er beschreibt die Systemantwort auf eine sinusförmige Anregung. Ein Vergleich mit Gleichung (0.20) zeigt, daß der Frequenzgang durch den Übergang $p \rightarrow i\omega$ aus der Übertragungsfunktion hervorgeht. Damit entspricht er gerade $G(p)$ auf der Imaginären Achse der p -Ebene.

Aus der Polarkoordinatendarstellung

$$G(i\omega) = |G(i\omega)| e^{i\varphi(\omega)} = \frac{\hat{y}}{\hat{u}} e^{i(\varphi_y - \varphi_u)} \quad (0.28)$$

ist ersichtlich, daß der Frequenzgang meßtechnisch erfaßt werden kann, indem zu jeder Frequenz $\omega = 0 \dots \infty$ die Verstärkung des Eingangssignals \hat{y} / \hat{u} und die Phasenverschiebung zwischen Eingangs- und Ausgangssignal $\varphi_y - \varphi_u$ bestimmt wird. Weil sich ein rein sinusförmiges Signal erst nach Abklingen aller Ausgleichsvorgänge einstellt, ist diese Messung nur an stabilen Systemen möglich.

Der Frequenzgang für alle positiven Frequenzen beschreibt das System vollständig. Frequenzen $\omega < 0$ brauchen nicht berücksichtigt werden, da gilt $G(i\omega) = G(-i\omega)$ - wie sich leicht nachrechnen läßt.

Graphische Darstellung des Frequenzganges

Eine graphische Veranschaulichung des Frequenzganges gibt das *Bode-Diagramm* (Frequenzkennliniendarstellung). Hier werden Amplituden- und Phasengang des Systems jeweils über einer logarithmisch geteilten Frequenzachse dargestellt. Der Amplitudengang wird üblicherweise in Dezibel aufgetragen, der Phasengang in Grad.

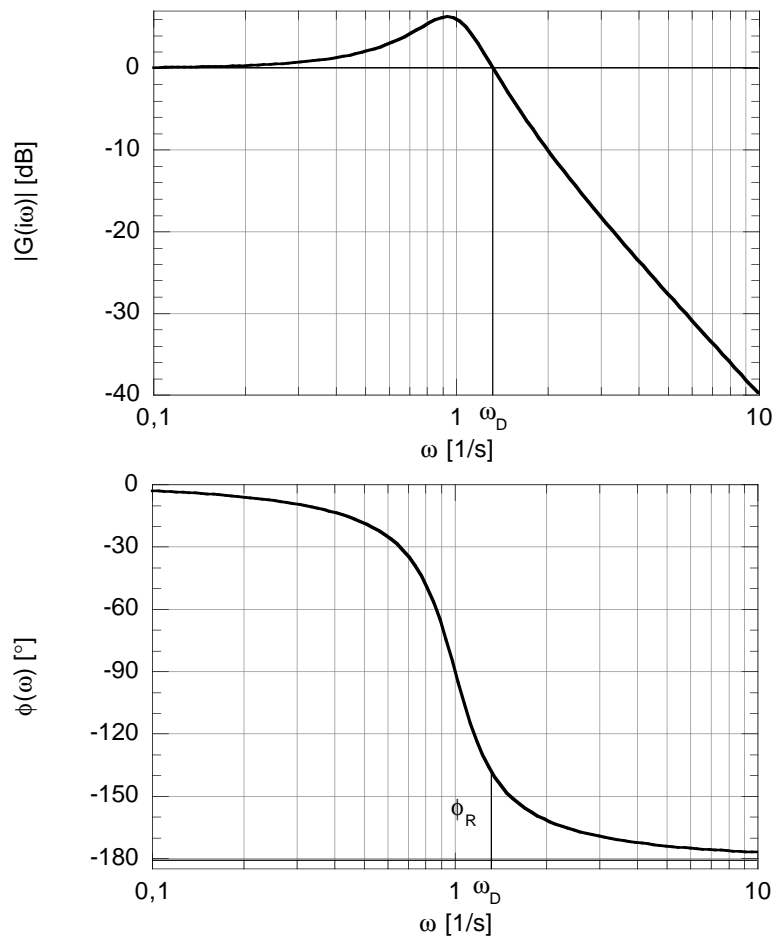


Abbildung 6 Bode-Diagramm eines Systems zweiter Ordnung

Die jeweilige Skalierung der Ordinate hat den Vorteil, daß Kennlinien von hintereinandergeschalteten Übertragungsgliedern einfach addiert werden können.

Mit der Frequenzkennliniendarstellung läßt sich ein Stabilitätskriterium (*Nyquist-Kriterium*) formulieren, auf dessen Grundlage ein sehr anschaulicher Reglerentwurf möglich ist. Für das Spule-Kugel-System ist dieses Verfahren jedoch nicht anwendbar (Anmerkung S.52).

Kennwerte im Frequenzbereich

In Abbildung 6 sind bereits die beiden wichtigsten Kennwerte des Frequenzbereiches eingezeichnet.

Die *Durchtrittsfrequenz* ω_D ist die Frequenz, an der der Amplitudengang die 0 dB-Linie schneidet.

An dieser Stelle im Phasengang ist die sogenannte *Phasenreserve* φ_R abzulesen. Sie ist definiert durch

$$\varphi_R = 180^\circ - |\varphi(\omega_D)| \quad (0.29)$$

und bezeichnet damit den Abstand des Phasenganges von der -180° -Linie bei der Durchtrittsfrequenz ω_D . Bei Systemen mit fallendem Phasengang im Bereich der Durchtrittsfrequenz nimmt die Phasenreserve ab, wenn die Durchtrittsfrequenz erhöht wird.

Inverse Laplacetransformation

Der häufig auftretende Fall, daß eine rationale Funktion in den Zeitbereich zurücktransformiert werden muß, soll hier anhand der Übertragungsfunktion (0.20) kurz dargestellt werden.

Es ist sinnvoll die Aufgabe auf die Anwendung von tabellierten Rücktransformationen zu reduzieren. Deshalb wird die Übertragungsfunktion in Partialbrüche zerlegt, für die die korrespondierenden Zeitfunktionen bekannt sind. Die Lösung der charakteristischen Gleichung des Nenners

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0 \quad (0.30)$$

führt auf n Pole der Form

$$p_j = \delta_j \pm i\omega_j \quad (0.31)$$

von denen n_1 reell seien ($\omega_j = 0$), jeweils mit der Vielfachheit k_j . Außerdem seien n_2 Pole konjugiert komplex mit der Vielfachheit l_j . Diese ergeben sich aus den Gleichungen $(p + \delta_j)^2 + \omega_j^2 = 0$ mit $\omega_j > 0$. Für den Nenner von $G(p)$ gilt demnach

$$N(p) = a_n (p - \delta_1)^{k_1} \dots (p - \delta_{n_1})^{k_{n_1}} ((p + \delta_{n_1+1})^2 + \omega_{n_1+1}^2)^{l_1} \dots ((p + \delta_{n_1+n_2})^2 + \omega_{n_1+n_2}^2)^{l_{n_2}} \quad (0.32)$$

wobei $n = k_1 + \dots + k_{n_1} + 2(l_1 + \dots + l_{n_2})$ den Grad des Nennerpolynoms angibt. Die Partialbruchzerlegung der Übertragungsfunktion lautet dann

$$G(p) = \sum_{j=1}^{n_1} \sum_{i=1}^{k_j} \frac{A_i}{(p - \delta_j)^i} + \sum_{j=n_1+1}^{n_1+n_2} \sum_{i=1}^{l_j} \frac{B_i p + C_i}{((p + \delta_j)^2 + \omega_j^2)^i} \quad (0.33)$$

mit reellen Konstanten A_j, B_j, C_j .

Die einzelnen Summanden lassen sich für $l_j = 1$ mit den Korrespondenzen

$$\begin{aligned} \frac{1}{(p - \delta)^n} &\mapsto \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{\delta t}, \quad n \geq 1 \\ \frac{Bp + C}{(p - \delta)^2 + \omega^2} &\mapsto e^{\delta t} \left(B \cos \omega t + \frac{C + \delta B}{\omega} \sin \omega t \right) \end{aligned} \quad (0.34)$$

leicht in den Zeitbereich transformieren. Für den selten auftretenden Fall mehrfach konjugiert komplexer Pole muß das Integral für die Rücktransformation [Bronstein, S.635] gelöst werden.

Die Rücktransformierte der Übertragungsfunktion setzt sich also aus Einzelschwingungen zusammen, deren Verläufe von der Lage der zugehörigen Pole in der komplexen Ebene abhängen. Die Pole bestimmen sich aus der charakteristischen Gleichung. Ein Vergleich der Gleichungen (0.30) und (0.18) zeigt, daß die charakteristische Gleichung wiederum gerade die Eigenbewegung des Systems beschreibt ($u(t) = 0$). Dieses wird demnach maßgeblich

durch die Pole der Übertragungsfunktion bestimmt. Wir werden darauf bei den Stabilitätsuntersuchungen (Abschnitt 0) zurückkommen.

Stationäres Verhalten der Übertragungsglieder

Eine Änderung des Eingangssignals ruft in einem System Ausgleichsvorgänge hervor. Im stationären Zustand (Gleichgewichtszustand) befindet sich ein System dann, wenn seine zeitveränderlichen Größen, insbesondere die Ausgangsgrößen, daraufhin einen konstanten Wert angenommen haben. Bei einem realen System wird dieser Zustand, vorausgesetzt er existiert, nach einer endlichen Zeit erreicht.

Für die mathematische Betrachtung ist der Grenzübergang $t \rightarrow \infty$ vorzunehmen.

Seien

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) &= u_{\infty} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) &= y_{\infty}\end{aligned}\tag{0.35}$$

die stationären Werte der Eingangs- und Ausgangsgröße, so folgt für Gleichung (0.7) wegen des Verschwindens der Ableitungen

$$a_0 y_{\infty} = b_0 u_{\infty}\tag{0.36}$$

Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden.

1. $a_0 \neq 0$

Im stationären Zustand folgt für die Ausgangsgröße

$$y_{\infty} = \frac{b_0}{a_0} u_{\infty}\tag{0.37}$$

und damit für $u(t) = h(t)$

$$y_{\infty} = \frac{b_0}{a_0} = k_{\infty}\tag{0.38}$$

Der Quotient b_0/a_0 wird als *Verstärkungsfaktor* k_{∞} bezeichnet.

Als Spezialfall ist $b_0 = 0$ enthalten. Hier strebt die Ausgangsgröße für jegliche Anregung mit konstantem Endwert gegen Null. Ein Beispiel ist der verlustbehaftete Reihenschwingkreis, bei dem die Spannung an Spule oder Widerstand als Ausgangsgröße gewählt wird.

2. $a_0 = 0$

Um Gleichung (0.36) zu erfüllen muß $u_{\infty} = 0$ gelten. Diese Glieder erreichen also, wenn sie mit Eingangssignalen mit nicht verschwindendem stationären Wert angeregt werden, keinen Gleichgewichtszustand.

Aus Darstellung (0.20) läßt sich für solche Glieder

$$G(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} + \dots + a_2 p + a_1} \quad (0.39)$$

ableiten. Der Faktor $1/p$ ist bezeichnend für I-Glieder (Abschnitt 0).

Ein Vergleich mit Darstellung (0.20) zeigt außerdem, daß sich der stationäre Zustand eines Übertragungsgliedes nach Sprunganregung - sofern er existiert - aus dem Produkt von u_∞ und der Übertragungsfunktion ergibt, wenn bei dieser der Grenzübergang $p \rightarrow 0$ durchgeführt wird. Existiert der Grenzwert nicht, erreicht das System für diesen Anregungsfall keinen stationären Zustand.⁵

Es ist klar, daß ein stationärer Zustand bei Systemen, die nicht stabil sind, unter Umständen nicht erreicht werden kann. Tatsächlich leitet sich daraus die grundlegende Stabilitätsbedingung (Abschnitt 0) her.

Im Bode-Diagramm kann das stationäre Verhalten bei der Frequenz $\omega = 0$ abgelesen werden.

Wichtige Übertragungsglieder

Im Folgenden sollen zunächst die drei Übertragungsglieder dargestellt werden, die die elementaren Operationen Verstärkung, Integration und Differentiation auf die Eingangsgröße anwenden. Durch Kombination dieser Glieder lassen sich beliebige Übertragungsfunktionen erzeugen. Nach diesem Prinzip werden beispielsweise Analogrechnerschaltungen zur Simulation von Differentialgleichungen aufgebaut.

Auf zwei häufig auftretende Zusammenschaltungen wird anschließend genauer eingegangen. Es handelt sich um das PT_1 -Glied sowie um den PID-Regler.

P-Glied

Wird das Übertragungsverhalten eines Systems durch die Differentialgleichung

$$y(t) = K_p \cdot u(t) \quad (0.40)$$

beziehungsweise die Übertragungsfunktion

$$G(p) = K_p \quad (0.41)$$

beschrieben, so wird jedes Eingangssignal um den Faktor K_p verstärkt.

Der Amplitudengang des P-Gliedes ist über alle Frequenzen konstant, eine Phasenverschiebung findet bei keiner Frequenz statt.

⁵ Diesen Zusammenhang zwischen Zeit- und Frequenzbereich kann man auch aus den Grenzwertsätzen für die Laplace-Transformation erhalten [Unbehauen, S.96 f].

I-Glied

Übertragungsverhalten der Form

$$y(t) = \frac{1}{T_I} \int u(t) dt \quad (0.42)$$

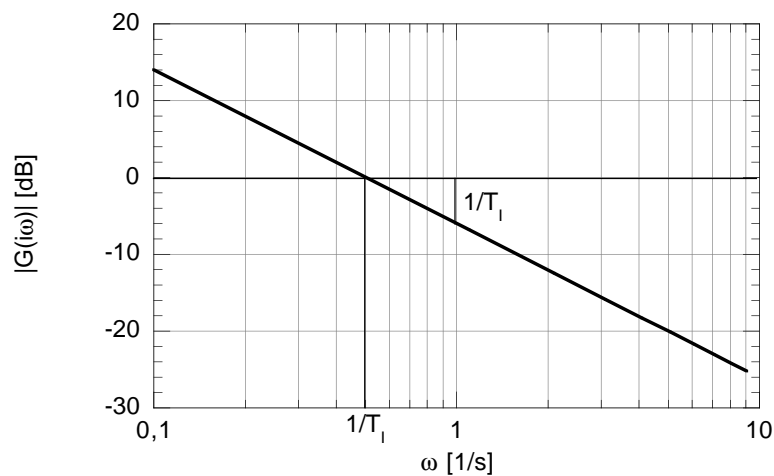
beziehungsweise

$$G(p) = \frac{1}{T_I p} \quad (0.43)$$

hat integrierenden Charakter. Die *Integrierzeit* T_I bezeichnet gerade die Zeit, die vergeht, bis das Ausgangssignal des Systems nach einem Sprungsignal am Eingang dessen Amplitude erreicht hat. Das I-Glied bewirkt wegen

$$G(i\omega) = \frac{1}{T_I \omega} e^{-i\frac{\pi}{2}} \quad (0.44)$$

einen Amplitudenabfall bei steigenden Frequenzen (20 dB/Dekade) und eine konstante Phasenabsenkung um 90° (Tiefpaßverhalten). Wie bereits gezeigt (Abschnitt 0) erreicht es nur bei verschwindender Eingangsgröße einen stationären Zustand. Da es andernfalls nicht aufhört zu wirken, führt es in einem Regler zu verschwindender Regelabweichung.



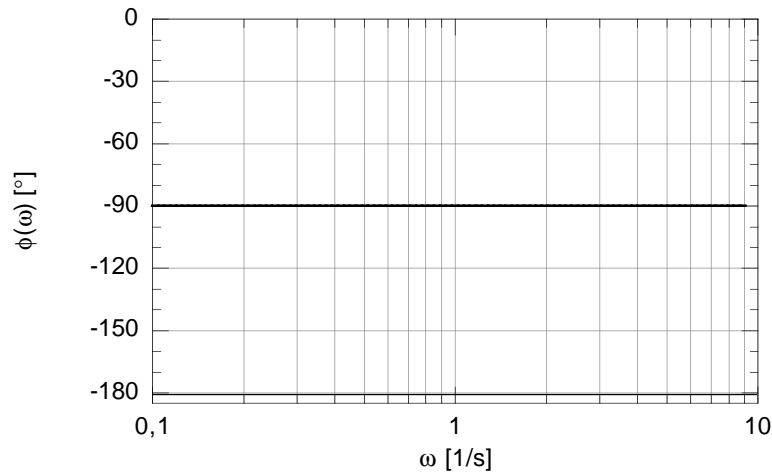


Abbildung 7 Bode-Diagramm eines I-Gliedes

D-Glied / DT_I-Glied

Die Differentialgleichung

$$y(t) = T_D \frac{d}{dt} u(t) \quad (0.45)$$

beziehungsweise die Übertragungsfunktion

$$G(p) = T_D p \quad (0.46)$$

mit der *Differenzierzeit* T_D beschreiben ein ideal differenzierendes Übertragungsverhalten. Der Frequenzgang

$$G(i\omega) = T_D \omega e^{i\frac{\pi}{2}} \quad (0.47)$$

zeigt, daß das D-Glied einen steigenden Amplitudengang (20 dB/Dekade) hat und eine frequenzunabhängige Phasenhebung um 90° verursacht (Hochpaßverhalten).

Dieses Glied liefert ein nichtverschwindendes Ausgangssignal nur bei Änderung der Eingangsgröße; es hat also immer den stationären Wert null, was der Amplitudengang für sehr kleine Frequenzen (konstante Eingangssignale) bestätigt.

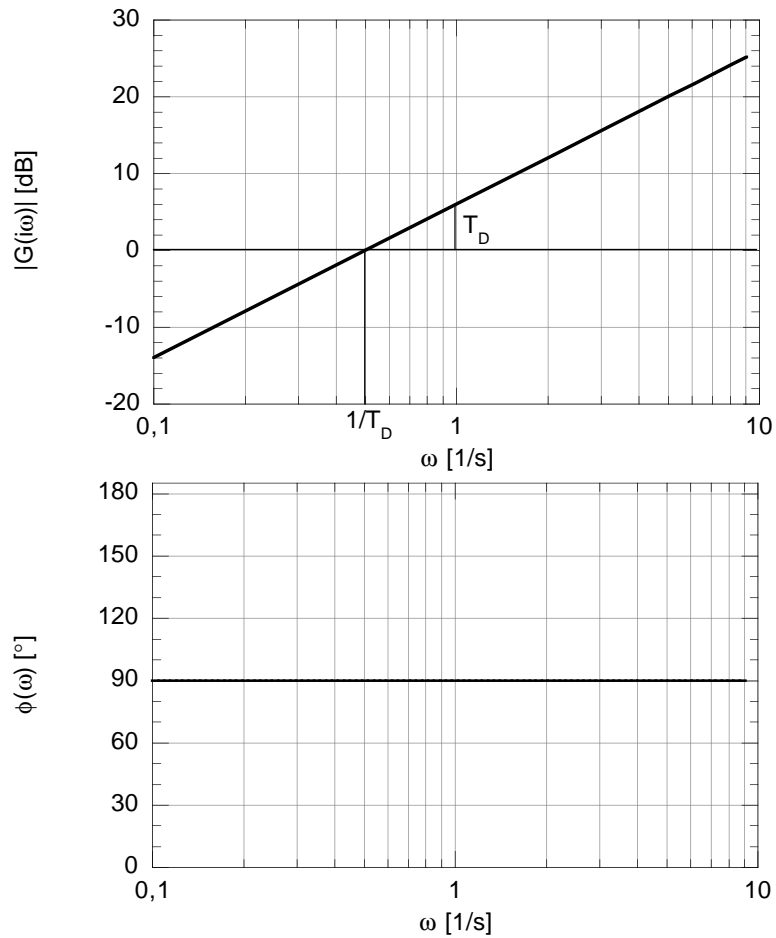


Abbildung 8 Bode-Diagramm eines D-Gliedes

Ein Übertragungsverhalten der Form (0.45) ist physikalisch nicht realisierbar ($m > n$). Statt dessen wird ein differenzierendes Glied immer mit einer gewissen Verzögerung arbeiten, sodaß sich das sogenannte *Vorhalteglied* (DT_1 -Glieder) mit

$$T \frac{d}{dt} y(t) + y(t) = T_D \frac{d}{dt} u(t) \quad (0.48)$$

und

$$G(p) = \frac{T_D p}{1 + T p} \quad (0.49)$$

ergibt.

An der Sprungantwort

$$h(t) = \frac{T_D}{T} e^{-\frac{1}{T}t} \quad (0.50)$$

läßt sich ablesen, daß die *Verzögerungszeit* T die Schnelligkeit des Zeitverhaltens bestimmt, während der Quotient aus beiden Zeitkonstanten die Amplitude festlegt.

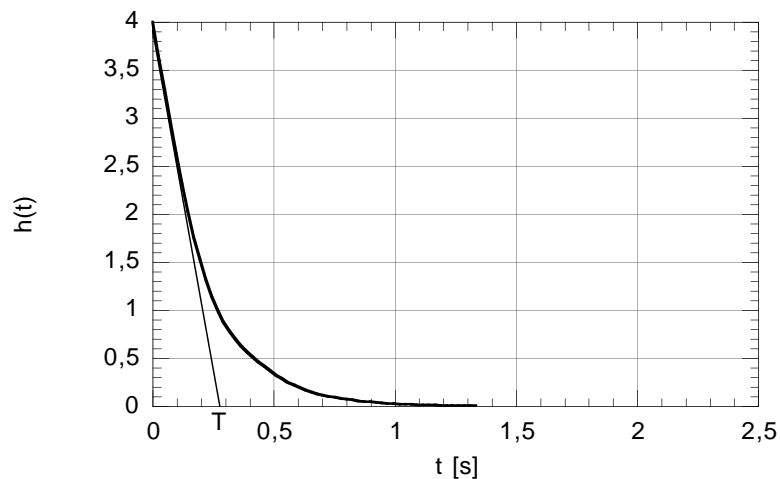
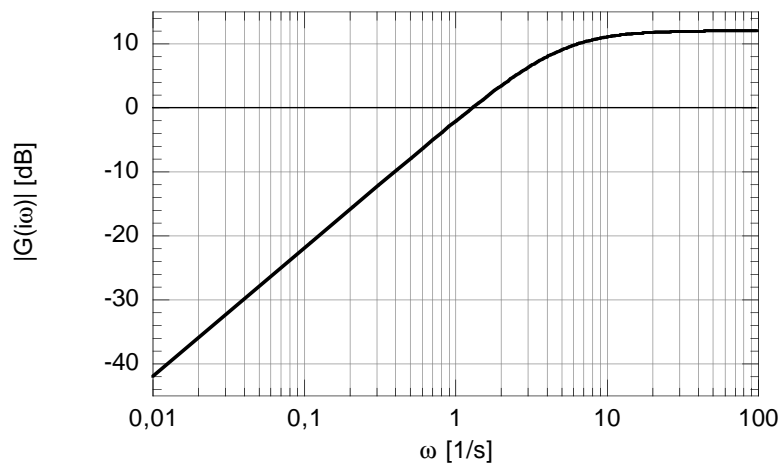


Abbildung 9 Sprungantwort eines DT_1 -Gliedes

Das DT_1 -Glied hat das Übertragungsverhalten eines Hochpaßfilters. Bei der Frequenz $\omega = 1/T$ liegt der Amplitudengang um 3dB unterhalb des Wertes, den er für sehr große Frequenzen annimmt.



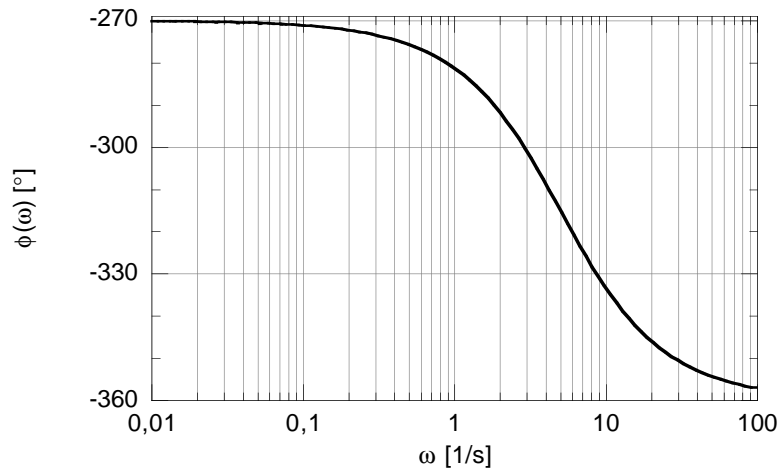


Abbildung 10 Bode-Diagramm eines DT_1 -Gliedes

Zusammengesetzte Übertragungsglieder

PT_1 -Glieder

Das Verzögerungsglied erster Ordnung ergibt sich aus der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt} y(t) + \frac{1}{T} y(t) = \frac{K}{T} u(t) \quad (0.51)$$

nach der sich viele Prozesse beschreiben lassen (z.B. Masse-Dämpfer-System, Tiefpaßfilter). Immer, wenn ein System verzögernde Wirkung zeigt, finden sich in der Übertragungsfunktion PT_1 -Anteile der Form

$$G(p) = K \frac{1}{1 + Tp} \quad (0.52)$$

(siehe auch (0.49)). Die Sprungantwort des PT_1 -Gliedes

$$h(t) = K(1 - e^{-\frac{1}{T}t}) \quad (0.53)$$

zeigt die verzögernde Eigenschaft.

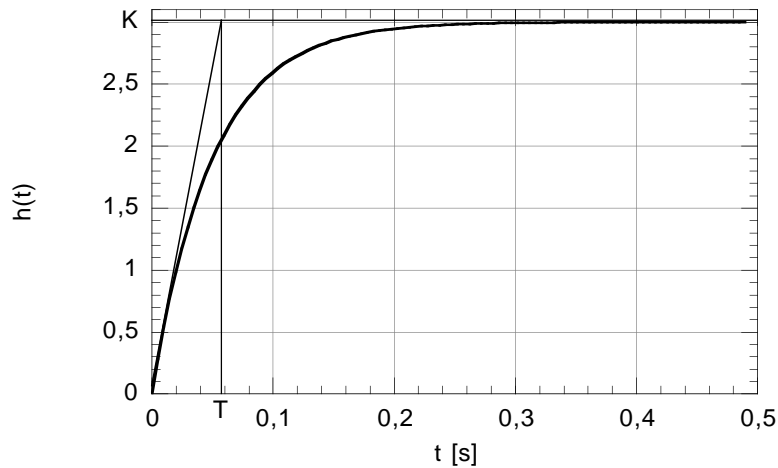


Abbildung 11 Sprungantwort eines PT_1 -Gliedes

Im Bode-Diagramm wird die Tiefpaßcharakteristik deutlich. Bei der Frequenz $\omega = 1/T$ ist das Eingangssignal um 3dB gegenüber dem Wert bei $\omega = 0$ abgeschwächt. Der Amplitudengang fällt für große Frequenzen mit 20dB/Dekade. Die verzögernde Wirkung läßt sich dadurch erklären, daß schnelle Signaländerungen hohe Frequenzen benötigen, diese hier jedoch stark gedämpft werden.

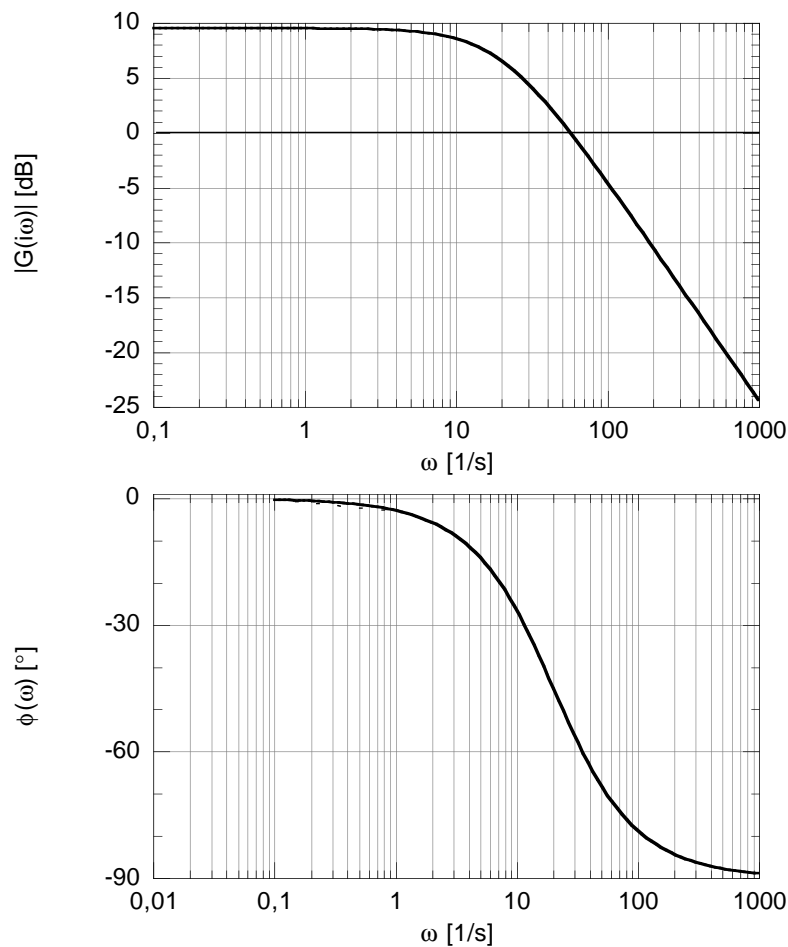


Abbildung 12 Bode-Diagramm eines PT_1 -Gliedes

Eine Möglichkeit der Erzeugung eines PT_1 -Gliedes aus elementaren Übertragungsgliedern zeigt die folgende Abbildung.

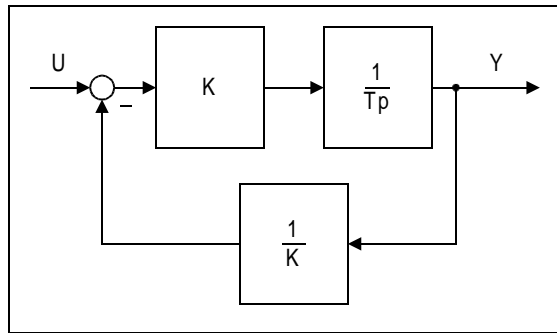


Abbildung 13 Das PT_1 -Glieder als Zusammenschaltung elementarer Übertragungsglieder

PID-Regler

Dieser - für die meisten Anwendungen hinreichende - Reglertyp hat die Übertragungsfunktion

$$G(p) = K_R \left(1 + \frac{1}{T_I p} + T_D p \right) \quad (0.54)$$

mit der *Nachstellzeit* T_I und der *Vorhaltezeit* T_D . Er lässt sich gemäß Abbildung 14 als Zusammenschaltung der drei elementaren Übertragungsglieder aufbauen.

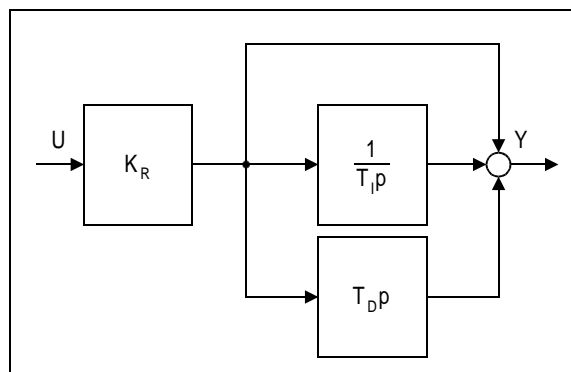


Abbildung 14 Blockschaltbild des PID-Reglers

Die Kombination dieser drei Elemente bringt im Übertragungsverhalten gegenüber den Einzelgliedern einige Vorteile.

Oft genügt es nicht einfach einen P-Regler in den Regelkreises einzufügen. Zum einen kann eine instabile Strecke durch einen Regler, der nichts an der Dynamik ändert und die Stellgröße allein aus der Verstärkung der Regeldifferenz bildet, nicht stabilisiert werden. Zum anderen ergibt sich - wie wir sehen werden (0.62) - eine bleibende Regelabweichung.

Diesen Nachteil kann ein I-Anteil, bei dem die Verstärkung bei niedrigen Frequenzen ansteigt, beheben (0.63). Wegen der Phasenabsenkung um 90° kann er zur Instabilität führen (Abschnitt 0). Auch wird durch einen I-Anteil die Ausregelzeit beträchtlich verlängert. Die maximale Überschwingweite erhöht sich ebenfalls durch einen I-Anteil.

Da ein D-Anteil bereits bei Änderung der Regeldifferenz reagiert und sprunghafte Änderungen derselben in sehr hohe Stellimpulse umwandelt, kann die Regelung durch einen solchen beschleunigt werden. Allerdings verstärkt ein D-Anteil gerade die hochfrequenten Signalanteile - zum Beispiel das immer vorhandene Rauschen. Ein D-Anteil senkt die

maximale Überschwingweite. Durch die Phasenhebung um 90° kann ein D-Anteil zur Stabilisierung verwendet werden.

Zu beachten ist, daß der ideale D-Anteil in der Übertragungsfunktion (0.54) bei der physikalischen Umsetzung durch ein DT_1 -Glieder zu ersetzen ist.

Übertragungsverhalten des Regelkreises

In diesem Abschnitt soll das Zusammenwirken der Übertragungsglieder des Regelkreises untersucht werden. Das geschieht am einfachsten im Frequenzbereich. Mit den einzelnen Übertragungsfunktionen nimmt Abbildung 3 folgende vereinfachte Gestalt an:⁶

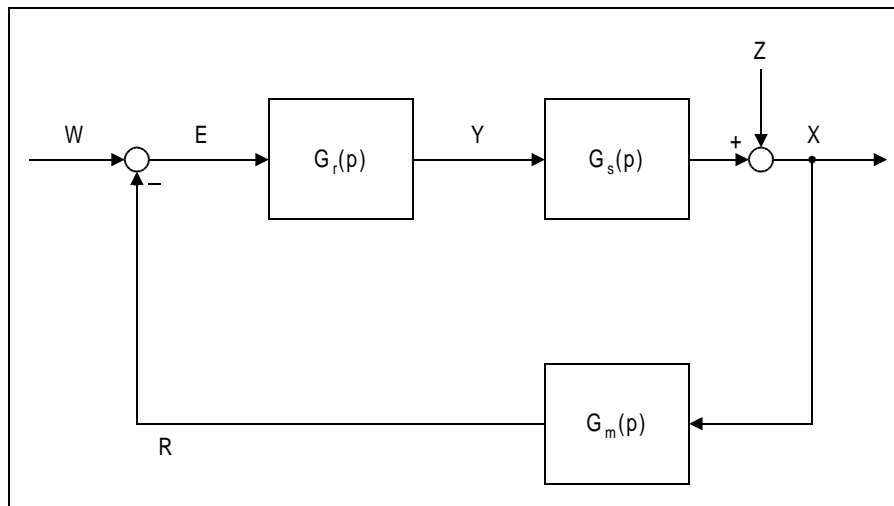


Abbildung 15 Standardregelkreis im Frequenzbereich

Für die Regelgröße X gilt in Abhängigkeit von den Eingangsgrößen W und Z

$$X(p) = \frac{G_r(p)G_s(p)}{1 + G_r(p)G_s(p)G_m(p)}W(p) + \frac{1}{1 + G_r(p)G_s(p)G_m(p)}Z(p) \quad (0.55)$$

Wegen der Linearität des Systems überlagern sich Führungs- und Störgröße unbeeinflusst. Deshalb kann bei verschwindenden Störungen

$$G_w(p) = \frac{G_r(p)G_s(p)}{1 + G_r(p)G_s(p)G_m(p)} \quad (0.56)$$

als *Führungsübertragungsfunktion* definiert werden.

Nullsetzen der Führungsgröße führt auf die *Störungsübertragungsfunktion*

$$G_z(p) = \frac{1}{1 + G_r(p)G_s(p)G_m(p)} \quad (0.57)$$

⁶ Ob Störungen möglicherweise an anderen Orten im Regelkreis einwirken, ist am speziellen Problem zu prüfen. Dadurch kann gegebenenfalls die Störungsübertragungsfunktion eine andere sein.

Beide Übertragungsfunktionen haben den gleichen Nenner. Das darin enthaltene Produkt

$$G_0(p) = G_r(p) \cdot G_s(p) \cdot G_m(p) \quad (0.58)$$

stellt die *Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises* dar. Diese kann, unter Voraussetzung vernachlässigbarer Störungen, ermittelt werden, indem der Regelkreis entsprechend Abbildung 16 geöffnet wird.

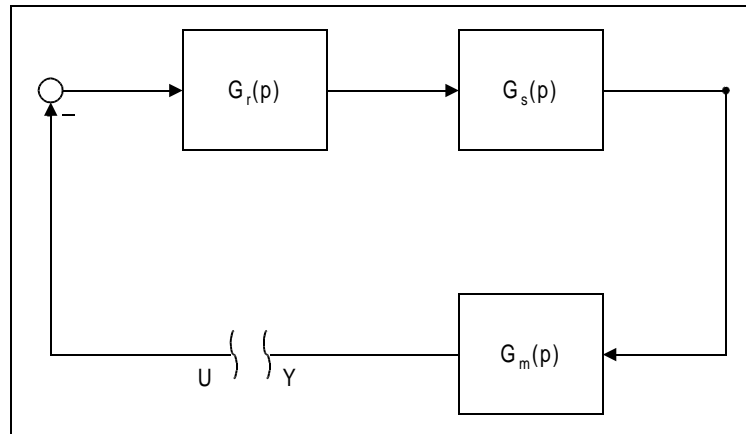


Abbildung 16 Zur Definition des offenen Regelkreises

Der offene Regelkreis geht demnach aus einer Hintereinanderschaltung von Regler-, Strecken-, und Meßglied hervor.

Die Funktion $G_0(p)$ spielt eine entscheidende Rolle bei der Untersuchung des stationären und des Stabilitätsverhaltens des Regelkreises. Sie hat in unserem Fall die allgemeine Form

$$G_0(p) = \frac{1}{p^k} \cdot \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^{n-k} + a_{n-1} p^{n-k-1} + \dots + a_{0+k+1} p + a_{0+k}} \quad (0.59)$$

Der Faktor $1/p^k$ mit $k = 0, 1, 2$ (höhere Ordnungen treten selten auf) stellt die I-Anteile des offenen Kreises dar.

Stationäres Verhalten des Regelkreises

Im Gleichgewichtszustand nehmen Führungs- und Regelgröße konstante Werte w_∞ und x_∞ an. Deshalb muß auch die Regelabweichung - als Differenz dieser Größen - für den Fall konstanter Eingangssignale einem festen Wert e_∞ zustreben. Erreicht sie diesen nicht, so existiert kein Gleichgewichtszustand. Zur Untersuchung des stationären Verhaltens des Regelkreises genügt es folglich, den Wert der Regelabweichung für große Zeiten zu bestimmen.

Der Frage, ob überhaupt ein stationärer Zustand erreicht werden kann, wird in Abschnitt 0 nachgegangen. Hier soll zunächst geklärt werden, wie er, falls existent, aussieht.

Aus Abbildung 15 läßt sich für die Regelabweichung E

$$E(p) = \frac{1}{1 + G_0(p)} W(p) - \frac{G_m(p)}{1 + G_0(p)} Z(p) \quad (0.60)$$

ableiten. Für den stationären Zustand bei Sprunganregung gilt nach dem in Abschnitt 0 Gesagten

$$e_{\infty} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{1 + G_0(p)} w_{\infty} - \lim_{p \rightarrow 0} \frac{G_m(p)}{1 + G_0(p)} z_{\infty} \quad (0.61)$$

Dabei wird vorausgesetzt, daß die Störgröße mit vernachlässigbarer Amplitude um einen festen Wert z_{∞} schwankt.

Abhängig von $G_0(p)$ sind zwei Fälle denkbar:

1. $k = 0$ in Gleichung (0.59) führt zu

$$e_{\infty} = \frac{1}{1 + K_0} w_{\infty} - \frac{K_m}{1 + K_0} z_{\infty} \quad (0.62)$$

mit der *Verstärkung des offenen Regelkreises* (Kreisverstärkung) $K_0 = b_0/a_0$ und der Verstärkung K_m des Meßgliedes.

Demnach stellt sich eine bleibende Regelabweichung ein, wenn der offene Kreis *P-Verhalten* zeigt. Diese kann jedoch nach Gleichung (0.62) verringert werden, indem K_0 erhöht wird.

2. Im Falle von $k \neq 0$ zeigt der offene Regelkreis *I-Verhalten* von Ordnung k . Für das stationäre Regelkreisverhalten folgt

$$e_{\infty} = 0 \quad (0.63)$$

also keine bleibende Regelabweichung.

Stabilität

Die Forderung nach Stabilität ist die grundlegende an den Regelkreis. Für eine nicht stabil arbeitende Regelung kann nicht gewährleistet werden, daß die Regelgröße der Führungsgröße - in gewissen Grenzen - folgt. Es kann sein, daß Schwingungen angeregt werden, deren Amplituden über alle Grenzen wachsen.

Instabilität kann verschiedene Gründe haben. Einerseits kann die Strecke bereits instabil sein, sie muß dann stabilisiert werden. Andererseits kann die Regelkreisstruktur selbst durch die Rückkopplung zu Instabilität führen.

Als stabil wird ein System bezeichnet, wenn es nach jeder Anregung in einen Gleichgewichtszustand übergeht. Es ist deshalb naheliegend Stabilität durch die Reaktion des Systems auf Änderung des Eingangssignals zu definieren.

Ein System soll genau dann als stabil bezeichnet werden, wenn seine Reaktion auf ein beschränktes Eingangssignal ein ebenfalls beschränktes Ausgangssignal ist.

Diese Bedingung läßt sich in der Praxis nur näherungsweise anwenden, da das System nie mit allen möglichen Signalen angeregt werden kann.

In der Theorie führt man deshalb von folgender - der Analyse zugänglichen - Definition [nach Unbehauen, S.158] aus:

Ein lineares zeitinvariantes System heißt (asymptotisch) stabil, wenn seine Gewichtsfunktion asymptotisch auf null abklingt, das heißt wenn gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0 \quad (0.64)$$

Ist der Grenzwert ungleich null, so heißt das System grenzstabil (zum Beispiel I-Glied). Andernfalls - wenn der Grenzwert nicht existiert - ist das System instabil.

Da der δ -Impuls, der der Ermittlung der Gewichtsfunktion zugrunde liegt, alle Frequenzen enthält (die Fouriertransformierte ist eins), ist diese Definition in Hinblick auf die Ausgangsdefinition sinnvoll.

Diese Stabilitätsbedingung läßt sich wegen Gleichung (0.21) auch für die Übertragungsfunktion formulieren.⁷

Nach Abschnitt 0 setzt sich die Rücktransformierte der Übertragungsfunktion - die Gewichtsfunktion - aus Teilvorgängen zusammen, deren Gestalt von den Polen abhängt. Diesen Schwingungen ist der Faktor $t^{n-1}e^{\delta t}$ gemeinsam. Er bestimmt über den Abklingkoeffizienten δ das Schwingungsverhalten für große Zeiten:

$$\delta > 0: \quad \lim_{t \rightarrow \infty} t^{n-1}e^{\delta t} = \infty \quad (0.65)$$

$$\delta = 0: \quad \lim_{t \rightarrow \infty} t^{n-1} = \begin{cases} \infty & \text{für } n \neq 1 \text{ (mehrfacher Pol)} \\ 1 & \text{für } n = 1 \end{cases}$$

$$\delta < 0: \quad \lim_{t \rightarrow \infty} t^{n-1}e^{\delta t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(n-1)!}{\delta^{n-1}} e^{\delta t} = 0$$

Da δ_j der Realteil des j -ten Poles der Übertragungsfunktion ist, kann über die Lage der Pole direkt ein Stabilitätskriterium abgeleitet werden [nach Unbehauen, S.160].

Ein lineares zeitinvariantes Übertragungssystem ist genau dann

1. asymptotisch stabil, wenn für die Wurzeln seiner charakteristischen Gleichung (0.30) $\text{Re}(p_j) = \delta_j < 0$ für alle p_j ($j = 1, 2, \dots, n$) gilt, das heißt, wenn alle Pole der Übertragungsfunktion in der linken p -Halbebene liegen.
2. instabil, wenn mindestens ein Pol seiner Übertragungsfunktion in der rechten p -Halbebene liegt, oder wenn mindestens ein mehrfacher Pol (k_j bzw. $l_j > 1$) auf der Imaginären Achse der p -Ebene liegt.
3. grenzstabil, wenn kein Pol der Übertragungsfunktion in der rechten p -Halbebene liegt, keine mehrfachen Pole auf der Imaginärachse auftreten und sich auf dieser mindestens ein einfacher Pol findet.

⁷ Der Eindeutigkeit halber sollen hier nur vollständig gekürzte Übertragungsfunktionen betrachtet werden.

Bei der Stabilitätsprüfung des geschlossenen Kreises sind nach den Gleichungen (0.56) oder (0.57) die Nullstellen der charakteristischen Gleichung

$$1 + G_0(p) = 0 \quad (0.66)$$

zu ermitteln.

Das Hurwitz-Kriterium

Zur Feststellung der Lage der Nullstellen einer Gleichung relativ zur Imaginären Achse liegt ein einfaches algebraisches Kriterium vor.

Ausgangspunkt ist die charakteristische Gleichung des Nenners der Übertragungsfunktion (0.30).

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0 \quad (0.67)$$

wobei die a_i reell sein sollen mit $a_n > 0$. Aus den Koeffizienten ist die $n \times n$ Hurwitz-Determinante

$$H = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \dots \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \dots \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots \\ 0 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix} \quad (0.68)$$

zu bilden. Existieren einzelne Koeffizienten nicht, so sind Nullen einzusetzen. Anschließend sind alle „nordwestlichen“ Unterdeterminanten H_1, \dots, H_n zu berechnen. Das Hurwitz-Kriterium erlaubt dann folgende Feststellung [nach Föllinger, S.167].

Sind H_1, \dots, H_n sämtlich positiv, so liegen alle Nullstellen der Gleichung links der i -Achse, während andernfalls mindestens eine Nullstelle auf oder rechts der i -Achse gelegen ist.

Für asymptotische Stabilität ist demnach erforderlich, daß alle H_1, \dots, H_n positiv sind. Für den Reglerentwurf lassen sich aus den Gleichungen bei Berücksichtigung dieser Bedingung Aussagen über die Bereiche machen, in denen die Reglerparameter liegen müssen.

Aus dem Aufbau der Hurwitz-Determinante ist erkennbar, daß die einzelnen Koeffizienten a_i bereits positiv sein müssen, um zu gewährleisten, daß die Determinanten es sind.

Im Anhang befindet sich ein MATHEMATICA-Programm zur Berechnung der Determinanten (Anhang 0).

Rückkopplung und Stabilität

Im Regelkreis wird das Prinzip der Rückkopplung dazu eingesetzt, das zu regelnde System auf äußere Faktoren reagieren zu lassen oder überhaupt erst einmal zu stabilisieren. Daß dadurch auch der umgekehrte Fall - Destabilisierung - eintreten kann, zeigt der folgende Abschnitt.

Bei einer Regelung wird ein Teil des Ausgangssignals an den Eingang des Systems zurückgeführt. Für ein solches rückgekoppeltes System werden zwei Fälle unterschieden:

1. *Gegenkopplung*: Das rückgeführte Signal erhält eine Phasenverschiebung um 180° , es wird also am Summationspunkt subtrahiert.
2. *Mitkopplung*: Das Signal wird entweder gar nicht oder um 360° phasenverschoben, was Addition am Summationspunkt bedeutet.

Betrachtet man den Verstärkungsfaktor K des rückgekoppelten Systems, so gilt bei Subtraktion an der Summierstelle

$$K = \frac{v_0}{1 + v_0 r_0} \quad (0.69)$$

wenn v_0 den Verstärkungsfaktor im Vorwärtszweig und r_0 den im Rückkopplungszweig bezeichnet.

Dies entspricht dem Fall der Gegenkopplung, die bei einer Regelung verwendet wird. Für Stabilität ist erforderlich, daß für Frequenzen, für die der Verstärkungsfaktor des offenen Kreises $v_0 r_0$ größer als eins ist, die Phasenverschiebung ungleich -180° ist (Stabilitätskriterium von Nyquist).

Wird bei um 180° phasenverschobenen Frequenzen (was im Falle der Gegenkopplung 360° entspricht) der Verstärkungsfaktor des offenen Kreises größer als eins gewählt, so ist die *Schwingbedingung* erfüllt und die Schaltung kann zur Schwingungserzeugung benutzt werden. Dies soll bei einer Regelung vermieden werden.

Entwurf einer Regelung

Für die folgenden Ausführungen wird angenommen, daß die Übertragungsfunktion der Strecke bekannt ist. Die des Meßgliedes ist durch die Wahl des Meßverfahrens der Regelgröße festgelegt. Den einzigen freien Parameter stellt an dieser Stelle die Übertragungsfunktion des Regelgliedes dar. Sie soll das dynamische Verhalten des Regelkreises dahingehend korrigieren, daß die an die Regelung gestellten Forderungen erfüllt werden.

Die Bestimmung der Reglerübertragungsfunktion verläuft im Allgemeinen iterativ. Das bedeutet, daß in einem ersten Schritt ein Regelglied gesucht und anschließend überprüft wird, ob die Forderungen erfüllt sind. Ist dies nicht der Fall, werden die Übertragungsfunktion beziehungsweise deren Parameter entsprechend angepaßt.

Gemeinhin versucht man die Regelung so zu entwerfen, daß sich die Regelgröße schwingend der Führungsgröße nähert. Die Kennwerte, die den Einschwingvorgang beschreiben (Abschnitt 0), sollen dann gewissen Vorgaben genügen. Da ein Zusammenhang zwischen den Kennwerten im Zeit- und denen im Frequenzbereich existiert, wird der Entwurf meist mit Hilfe des Nyquist-Kriteriums im Frequenzbereich durchgeführt.

Forderungen an eine Regelung

Die vier Grundforderungen an eine Regelung lauten folgendermaßen:

1. Das System muß *stabil* sein.
2. Die Regelgröße muß sich mit einer vorgegebenen *stationären Genauigkeit* einstellen. Diese kann einerseits durch Erhöhen der Reglerverstärkung K_r erzielt werden, denn das führt nach Gleichung (0.57) zu

$$\lim_{K_r \rightarrow \infty} G_Z(p) = 0 \quad (0.70)$$

und nach Gleichung (0.62) für $K_r \rightarrow \infty$ zu

$$e_{\infty} = 0 \quad (0.71)$$

Durch Einfügen eines I-Anteils in den Regler kann - mit Gleichung (0.63) - ebenfalls $r_{\infty} = w_{\infty}$ erreicht werden.

Beide Maßnahmen führen zu einer Anhebung des Amplitudenganges im Bereich kleiner Frequenzen.

Bei der Erfüllung dieser beiden Forderungen ist ein Kompromiß zu finden. Denn eine Erhöhung des Verstärkungsfaktors verschiebt mit dem Amplitudengang auch die Durchtrittsfrequenz, und zwar in Richtung größerer Frequenzen. Bei fallendem Phasengang kann dabei die -180 dB-Linie unterschritten werden, was nach Abschnitt 0 zur Instabilität des geschlossenen Kreises führt.

Andererseits bedeutet die Phasenabsenkung durch das I-Glied eine Verringerung der Phasenreserve möglicherweise bis auf 0° , was zum gleichen Ergebnis führt.

3. Bei Aufschalten einer sprungförmigen Änderung soll die Regelgröße nur in bestimmten Grenzen überschwingen. Das System soll eine hinreichende *Dämpfung* haben.
4. Die Regelgröße soll der Stellgröße *genügend schnell* folgen beziehungsweise Störungen sollen schnell ausgeglichen werden.

Es ist einleuchtend, daß auch diese Forderungen nicht unabhängig voneinander erfüllbar sind.

Große Zeitkonstanten in den Nennern der Übertragungsfunktionen führen dazu, daß schnelle Signaländerungen nicht wirken können (siehe PT_1 -Glieder Abschnitt 0). Im Sinne einer schnellen Regelung sollten diese Zeitkonstanten durch Zählerzeitkonstanten des Reglers kompensiert werden.

Stabilisierung einer instabilen Strecke

Das Prinzip der Stabilisierung einer instabilen Strecke kann man sich anhand der Gleichung des Regelkreises (0.55) vor Augen führen. Führungs- und Störungsübertragungsfunktion besitzen den gleichen Faktor $1/(1+G_0)$. Notiert man die einzelnen Übertragungsfunktionen als Brüche, so ergibt sich

$$\frac{1}{1+G_0} = \frac{1}{1 + \frac{Z_r}{N_r} \frac{Z_s}{N_s} \frac{Z_m}{N_m}} = \frac{N_r N_m N_s}{N_r N_s N_m + Z_r Z_s Z_m} \quad (0.72)$$

was bedeutet, daß das Verhalten des Regelkreises durch das Zusammenwirken der Pole und Nullstellen aller Übertragungsglieder bestimmt wird. Deshalb kann die Lage der Pole des geschlossenen Kreises durch geeignete Wahl der Reglerübertragungsfunktion Z_r/N_r festgelegt werden. Dabei wird versucht, unerwünschte Pole in der rechten p -Halbebene durch Nullstellen zu kompensieren oder - was bei schwankenden oder unbekannten Parametern und damit ungenauer Pollage geeigneter ist - in die linke Halbebene zu verlagern.

Versuch *Magnetschwebekugel*

In diesem Teil der Arbeit werden Untersuchungen zur Regelungstechnik der *Magnetschwebekugel* angestellt.

Ziel des betrachteten Experimentes ist es, eine ferromagnetische Kugel im Feld einer Zylinderspule stabil zu lagern. Die Kugel soll in einer bestimmten Höhe, der Sollage, in der Schwebe gehalten werden. Daneben soll sie auch in horizontaler Richtung stabilisiert sein. Es muß also bei jeder Auslenkung aus der Sollage eine rücktreibende Kraft auf die Kugel wirken. Da dies in einem statischen Magnetfeld nicht möglich ist (Abschnitt 0), muß das Feld ständig dahingehend geändert werden, daß die resultierende Kraft auf die Kugel ihrer Bewegung entgegenwirkt. Die jeweils benötigte Änderung des Magnetfeldes wird durch einen Regler ermittelt.

Dem Reglerentwurf (Abschnitt 0), sollen zunächst einige Überlegungen zu dem zu regelnden System - bestehend aus Zylinderspule und Kugel - vorangestellt werden (Abschnitt 0).

Funktionsweise der Regelung

Die Aufgabe, die Kugel in der Schwebe zu halten, kann als Forderung nach Einhaltung eines konstanten Abstandes zwischen Spule und Kugel aufgefaßt werden. Es gibt mehrere Möglichkeiten diese Größe zu erfassen. In einem bereits realisierten Experiment geschieht dies auf direktem Weg über die Spannung an einer Photozelle, die je nach Kugelposition mehr oder weniger stark abgeschattet wird [Zirpel].

Alternativ kann die Kugelposition indirekt über die Induktivität der Spule ermittelt werden, weil auch diese sich mit der Kugelposition ändert. Dem liegt folgender Effekt zugrunde: Eine stromdurchflossene Spule erzeugt ein magnetisches Feld, das den Raum erfüllt. Dadurch wird in der ferromagnetischen Kugel ein magnetisches Dipolmoment induziert, dessen Größe vom äußeren Feld abhängt. Dieses Moment erzeugt wiederum ein Feld, das je nach Abstand auch die Spule durchdringt. Da die Induktivität als Proportionalitätsfaktor zwischen Strom und magnetischem Fluß, der die Spule durchsetzt, definiert ist, ändert sie sich folglich mit dem Abstand zwischen Kugel und Spule.

Um die Position der Kugel zu bestimmen genügt es die Induktivität der Spule zu messen. Durch Vergleich mit einer vorgegebenen Induktivität, die der in der Sollage entspricht, kann die Regelabweichung bestimmt werden. Die Induktivität der Spule - genauer gesagt der gemessene Wert derselben - ist die *Regelgröße*.

Bleibt die Frage, wie die Kugelposition beeinflußt werden kann. Die Kraft auf einen magnetischen Dipol - den die Kugel darstellt - hängt entscheidend von der Größe der äußeren Feldstärke ab. Diese richtet sich im Fall der Spule nach dem sie durchfließenden Strom. Somit kann über den Spulenstrom die Kraft auf die Kugel und damit ihre Position variiert werden. Der Spulenstrom ist damit die *Stellgröße* im Regelkreis.

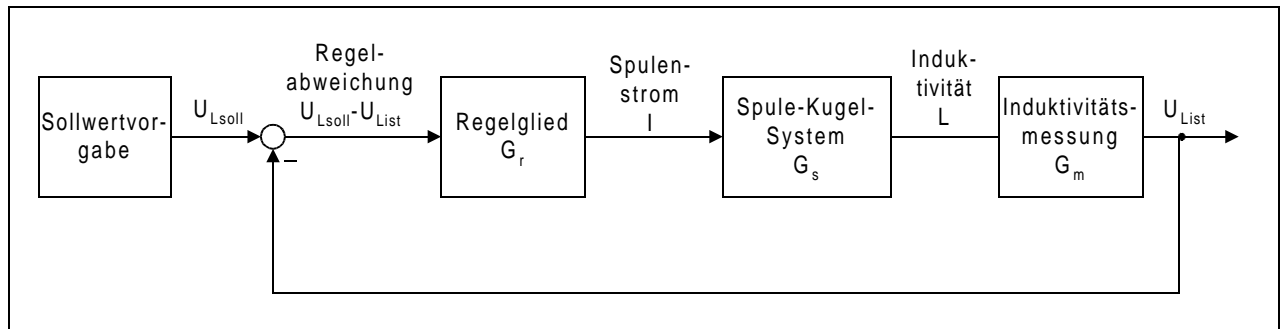


Abbildung 17 Struktur der Regelung

Spule-Kugel-System

Ziel dieses Abschnitts ist es, die Übertragungsfunktion des Spule-Kugel-Systems zu finden. Am Anfang stehen zunächst einige Abschätzungen, aus denen man sich ein Bild von dem qualitativen Verhalten des Systems machen kann. Mit diesen wird in Abschnitt 0 aus einem vereinfachten Modell die Übertragungsfunktion hergeleitet. Sie bildet die Grundlage für die weiteren Betrachtungen.

Bezeichnungen

Da das Problem rotationssymmetrisch ist, wird in Zylinderkoordinaten gerechnet.

Für die weiteren Überlegungen werden folgende Vereinbarungen bezüglich Benennungen und Wahl des Koordinatensystems gemacht:

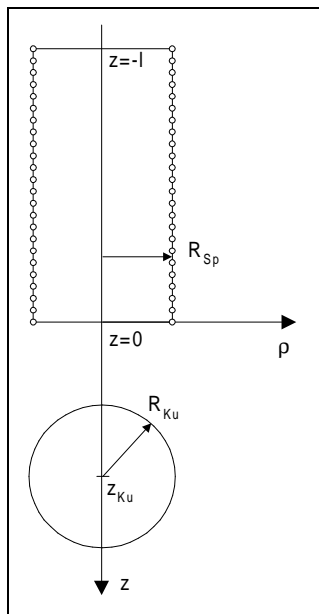


Abbildung 18 Geometrie des Problems

Zylinderspule:

Länge l

Radius R_{Sp}

Windungszahl N

Strom I

Kugel:

Radius R_{Ku}

Masse m

Permeabilität μ_r

Das Koordinatensystem wird so gewählt, daß sich die Spule von $z = 0$ bis $z = -l$ erstreckt und die Kugel bei $z = z_{Ku} > 0$ liegt.

Als Abstand zwischen Kugel und Spule wird z_{Ku} definiert.

Überlegungen zum Systemverhalten

Im Hinblick auf den Regelungsentwurf sollen Aussagen über die Stabilität der Kugel und die Induktivität der Spule, sowie die Kraft auf die Kugel gemacht werden.

Der Entwurf des Experiments läßt einige Freiheiten hinsichtlich der Komponenten des Spule-Kugel-Systems zu.

So ist zum Beispiel zu klären, welche Auswirkungen die Geometrie auf das Systemverhalten hat und wie Spule und Kugel am günstigsten beschaffen sein sollen.

Zunächst muß entschieden werden, ob eine Luftspule oder eine eisengefüllte Spule verwendet werden soll. Bei einer Spule mit Eisenkern ist die magnetische Induktion im Außenraum der Spule sehr viel höher als bei der eisenfreien Spule, weshalb auch die Kraft auf einen ferromagnetischen Körper zunimmt. Wegen der höheren magnetischen Feldenergie im Innenraum der Kugel besitzt eine solche Spule eine höhere Induktivität (Gleichung (0.13)). Mit

$$U_L = L \frac{dI}{dt} \quad (0.1)$$

folgt, daß dann zum Erzielen schneller Stromänderungen - wie sie für die Regelung benötigt werden - hohe Spannungen nötig sind. Überdies stören die Ummagnetisierungsverluste im Eisenkern.

Aus diesen Gründen soll im Versuch eine Luftspule eingesetzt werden. Für dieselbe Kraftwirkung sind in diesem Fall zwar höhere Ströme nötig. Diese liegen jedoch im Bereich weniger Ampere (siehe Ergebnis S.70).

Stabilität im magnetischen Feld

Für eine Gleichgewichtslage in einer Sollage muß auf die Kugel bei jeder Auslenkung aus dieser eine rücktreibende Kraft wirken, das heißt sie muß sich in einem Energieminimum befinden. Aus

$$\vec{F} = -\text{grad}W \quad (0.2)$$

folgt, daß die Kugel bezüglich oben definiertem Koordinatensystem stabil ist, wenn bei einer Abweichung aus der Sollage folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. *Horizontale Stabilität:*

$$\frac{dF_p}{d\rho} < 0 \quad (0.3)$$

2. *Vertikale Stabilität:*

$$\frac{dF_z}{dz} < 0, \quad F_z = 0 \quad (0.4)$$

Zuerst muß geklärt werden, ob sich die Kugel nicht ohne eine Regelung in einem statischen Magnetfeld stabilisieren läßt.

In der Kugel wird ein zum äußeren Feld paralleles Dipolmoment induziert. Für radiale *und* axiale Stabilität muß das äußere Feld die Bedingung

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial z} \right)^2 < \vec{B} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial z^2} < - \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial z} \right)^2 \quad (0.5)$$

erfüllen [Dölling, S.169]. Dies ist wegen

$$\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial z} \right)^2 > 0 \quad (0.6)$$

nicht möglich.

Daher wird das Feld so konfiguriert, daß radiale Stabilität im interessierenden Bereich garantiert ist. Das macht eine Regelung für die axiale Stabilisierung der Kugelposition erforderlich.

Das B -Feld der Spule muß für radiale Stabilität der Kugel im Bereich des Arbeitspunktes die Bedingung

$$\Delta := \vec{B} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial z^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial z} \right)^2 > 0 \quad (0.7)$$

erfüllen. Diese Bedingung soll im Folgenden für das Feld der Zylinderspule geprüft werden.

Für die Bestimmung des Feldes im Außenbereich der Spule können Ergebnisse aus äquivalenten Rechnungen für das elektrische Potential im Bereich einer Lochblende [Jackson, Kapitel 3.13] herangezogen werden. Angenommen die magnetische Feldstärke nehme die asymptotischen Werte

$$\begin{aligned} H_0 &= 0 & z > 0 \\ H_1 &= \frac{NI}{l} & z < 0 \end{aligned} \quad (0.8)$$

an. Dann ist das skalare Potential gegeben durch

$$\Phi = \begin{cases} -H_0 z + \Phi^{(1)} & z > 0 \\ -H_1 z + \Phi^{(1)} & z < 0 \end{cases} \quad (0.9)$$

mit einem unbekannten Zusatzpotential $\Phi^{(1)}$. Uns interessiert nur der Bereich $z > 0$, für den wir $\Phi = \Phi^{(1)}$ erhalten.

Der exakte Ausdruck für das Potential in diesem Bereich lautet

$$\Phi^{(1)}(\rho, z) = \sqrt{\frac{4\mu_0}{\pi}} (H_0 - H_1) R_{Sp}^2 \int_0^\infty j_1(kR_{Sp}) e^{-kz} J_0(k\rho) dk \quad (0.10)$$

[Jackson, S.167]. Für die sphärische Bessel-Funktion erster Ordnung gilt

$$j_1(kR_{Sp}) = \frac{1}{kR_{Sp}} \left(\frac{\sin(kR_{Sp})}{kR_{Sp}} - \cos(kR_{Sp}) \right) \quad (0.11)$$

Das H -Feld folgt aus (0.10) durch Gradientenbildung. Unter Berücksichtigung von (0.8) und dem linearen Zusammenhang, der in Luft zwischen B und H gilt, erhalten wir für das B -Feld im Bereich des Spulenendes

$$\vec{B} = \mu_0 \sqrt{\frac{4\mu_0}{\pi}} \frac{NI}{l} \begin{pmatrix} -\int_0^\infty \frac{\sin(kR_{Sp})}{k} e^{-kz} J_1(k\rho) dk + R_{Sp} \int_0^\infty \cos(kR_{Sp}) e^{-kz} J_1(k\rho) dk \\ 0 \\ -\int_0^\infty \frac{\sin(kR_{Sp})}{k} e^{-kz} J_0(k\rho) dk + R_{Sp} \int_0^\infty \cos(kR_{Sp}) e^{-kz} J_0(k\rho) dk \end{pmatrix} \quad (0.12)$$

Daß dieses Feld die Bedingung (0.7) auf der Symmetrieachse ($\rho = 0$) erfüllen kann, zeigt Abbildung 19.⁸ Das Ergebnis entspricht der Vorstellung, daß sich der magnetische Dipol in Richtung dichter Feldlinien bewegt, wie dies für das Spulenfeld auf der Achse gegeben ist. In größerer Entfernung von der Spule ist radiale Stabilität jedoch nicht mehr gewährleistet. Die Kugel sollte daher in einem Bereich sicherer Stabilität positioniert werden.

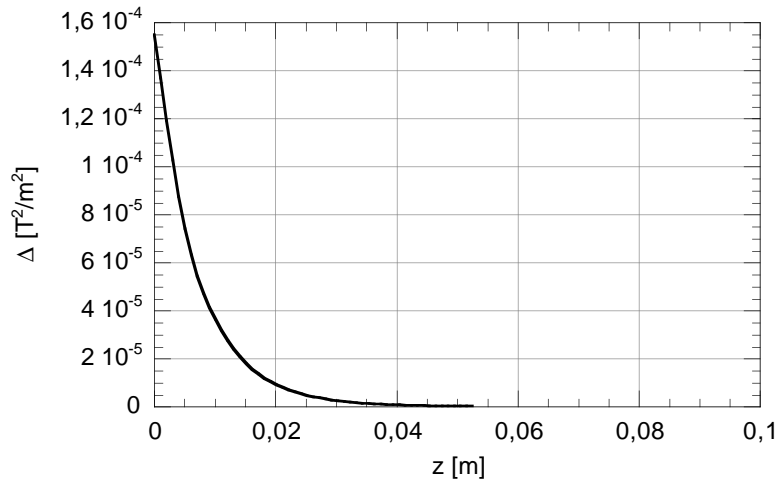


Abbildung 19 Stabilitätsbedingung (0.7) auf der Symmetrieachse

⁸ Die Rechnungen wurden mit MATHEMATICA für die auf Seite 44 angegebenen Werte durchgeführt (Anhang 0).

Die Induktivität der Spule

Da die Berechnung des exakten Magnetfeldes der Spule sehr aufwendig ist, soll mit dem einfachen Modell einer langen Spule gearbeitet werden. Dieses liefert für die Abschätzung des Effekts der Kugelposition auf die Induktivität der Spule befriedigende Ergebnisse. Aus ihnen wird deutlich, daß die Induktivität zur Erfassung der Regelgröße geeignet ist.

Für die Induktivität L der Spule gilt

$$L = \frac{2W}{I^2} \quad (0.13)$$

wobei W die im Spulenvolumen gespeicherte magnetische Feldenergie ist

$$W = \frac{1}{2} \int \vec{H}_i \vec{B}_i dV_{Sp} \quad (0.14)$$

Der Index i bezeichnet die Felder in der Spule. Diese sollen sich aus einem konstanten - vom Spulenstrom verursachten - Term H_{Sp} und einem von der Kugelposition abhängigen Term H_{Ku} zusammensetzen.

$$\vec{H}_i = \vec{H}_{Sp} + \vec{H}_{Ku} \quad (0.15)$$

H_{Sp} soll lediglich eine z-Komponente besitzen, der Betrag im ungestörten Fall (ohne Kugel) der Feldstärke in der Spulenmitte entsprechen

$$\vec{H}_{Sp} = \frac{NI}{l} \vec{e}_z \quad (0.16)$$

Für die Materialien von Kugel und Spule wird - unter Vernachlässigung von Hysteresiseffekten (weiches Eisen) - der Zusammenhang

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \quad (0.17)$$

zwischen Feldstärke und Induktion angenommen ($\mu_r \gg 1$).

Da die Ursache des Kugelfeldes das äußere Feld der Spule H_a ist, kann dieses hier nicht wie im Fall der langen Spule vernachlässigt werden. Eine exakte Berechnung des Feldes der Kugel müßte einbeziehen, daß das äußere Spulenfeld inhomogen ist und eine ausgedehnte Kugel somit Bereiche verschiedener Feldstärke überdeckt. Hier soll davon ausgegangen werden, daß in der Kugel eine konstante Feldstärke vorliegt und sie somit homogen magnetisiert ist. Mit

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \quad (0.18)$$

folgt daraus

$$\vec{M} = (\mu_r - 1)\vec{H} \quad (0.19)$$

Für die Feldstärke außerhalb der Spule wird der Ansatz gemacht

$$\vec{H}_a = \frac{1}{2} \vec{H}_{Sp} e^{-\frac{z}{R_{Sp}}} \quad (0.20)$$

das heißt sie fällt vom halben Wert der Feldstärke H_{Sp} in der Spule an mit zunehmendem Abstand vom Spulenrand exponentiell ab. Sie soll in diesem Modell unabhängig von ρ sein (kleine Abweichungen von der Symmetrieachse).

Das Dipolfeld der Kugel hat am Ort P ($r \gg R_{Ku}$) die Gestalt

$$\vec{H}_{Ku} = \frac{R_{Ku}^3}{3r^3} (3(\vec{M}_{Ku}\vec{r})\frac{\vec{r}}{r^2} - \vec{M}_{Ku}) \quad (0.21)$$

[Wolff, S.104].

Für den hier interessierenden Bereich ($z < 0$) kann mit

$$\vec{r} = \rho \vec{e}_\rho + (z - z_{Ku}) \vec{e}_z \quad (0.22)$$

und den Gleichungen (0.16), (0.19) und (0.20) für den Feldvektor

$$\vec{H}_{Ku}(\rho, z) = \begin{pmatrix} \frac{R_{Ku}^3}{\sqrt{\rho^2 + (z - z_{Ku})^2}^3} M_{Ku} \rho (z - z_{Ku}) \\ 0 \\ \frac{R_{Ku}^3}{3\sqrt{\rho^2 + (z - z_{Ku})^2}^3} M_{Ku} (2(z - z_{Ku})^2 - \rho^2) \end{pmatrix} \quad (0.23)$$

geschrieben werden, wobei für die Magnetisierung der Kugel

$$M_{Ku} = (\mu_r - 1) \frac{NI}{2l} e^{-\frac{z_{Ku}}{R_{Sp}}} \approx \mu_r \frac{NI}{2l} e^{-\frac{z_{Ku}}{R_{Sp}}} \quad (0.24)$$

($\mu_r \gg 1$) gilt.

Die Induktivitätsberechnungen nach den Gleichungen (0.15), (0.14) und (0.13) wurden für verschiedene Parameterwerte mit dem Computerprogramm MATHEMATICA ausgeführt (Anhang 0).

Soweit nicht anders angegeben sind folgende Werte verwendet worden:

Zylinderspule:

Länge $l = 6 \text{ cm}$

Radius $R_{Sp} = 3 \text{ cm}$

Windungszahl $N = 1100$

Strom $I = 4.7 \text{ A}$

Kugel:

Radius $R_{Ku} = 3 \text{ cm}$

Permeabilität $\mu_r = 1200$

Arbeitspunkt:

$z_{AP} = 3 \text{ cm}$

$I_{AP} = 4.7 \text{ A}$

Bei dieser Stromstärke reicht die Kraft auf die Kugel - laut Abschätzung (0.28) - gerade aus um die Kugel zu heben.

Spulenlänge

Abbildung 20 zeigt die Änderung der Induktivität bei Verschieben der Kugel. Variation der Spulenlänge verändert die Größe der Induktivität, nicht jedoch die Steigung der Graphen.

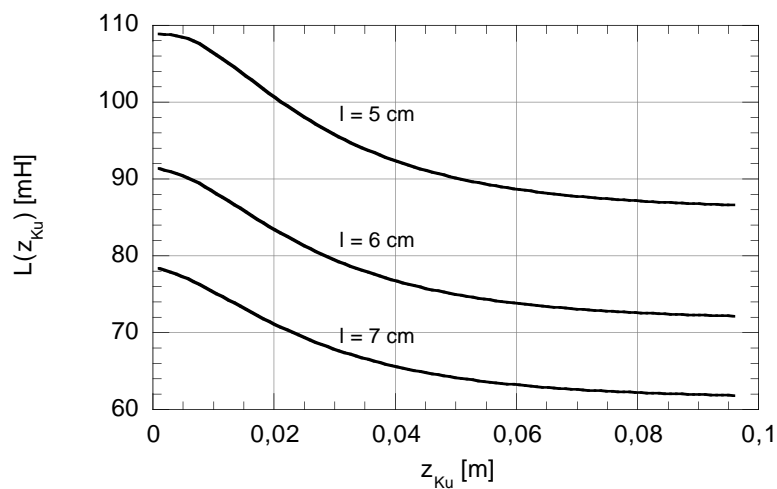


Abbildung 20 Induktivitätsänderung ($l = 5 \text{ cm}, 6 \text{ cm}, 7 \text{ cm}$)

Windungszahl

Die Induktivität kann auch durch Erhöhung der Windungszahl vergrößert werden. Am Gradienten der Funktion $L(z_{Ku})$ ändert das jedoch nichts.

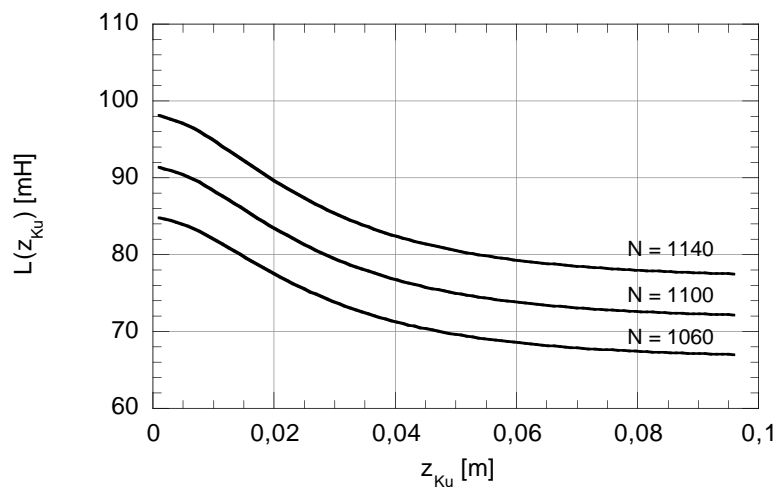


Abbildung 21 Induktivitätsänderung ($N = 1060, 1100, 1140$)

Verhältnis von Kugel- zu Spulenradius

Interessanter ist der Zusammenhang, der zwischen den Radien und der Induktivitätsänderung besteht. Je größer die Kugel im Verhältnis zum Spulenradius ist, desto größer ist die Induktivität und desto stärker steigt sie bei Annäherung der Kugel. Gleichung (0.23) zeigt, daß die Stärke des Kugelfeldes proportional zur dritten Potenz des Kugelradius ist.

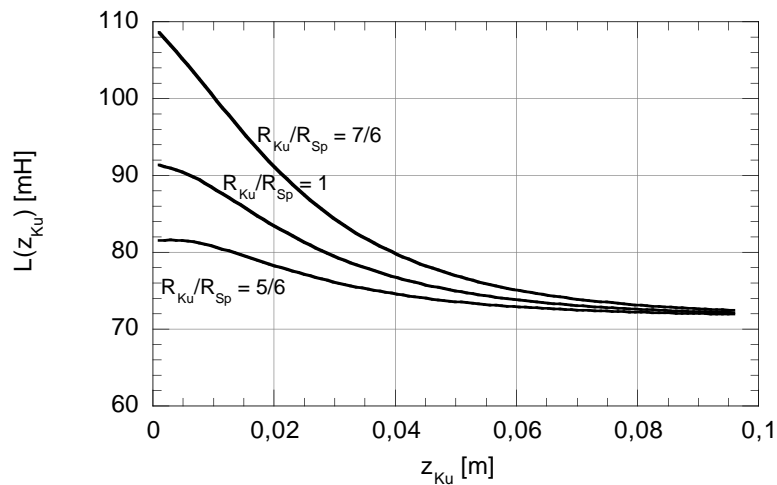


Abbildung 22 Induktivitätsänderung ($R_{Ku}/R_{Sp} = 5/6, 1, 7/6$)

Permeabilität

Auch eine Vergrößerung der Permeabilität des Kugelmaterials kann den Effekt verstärken, den die magnetisierte Kugel auf die Induktivität macht.

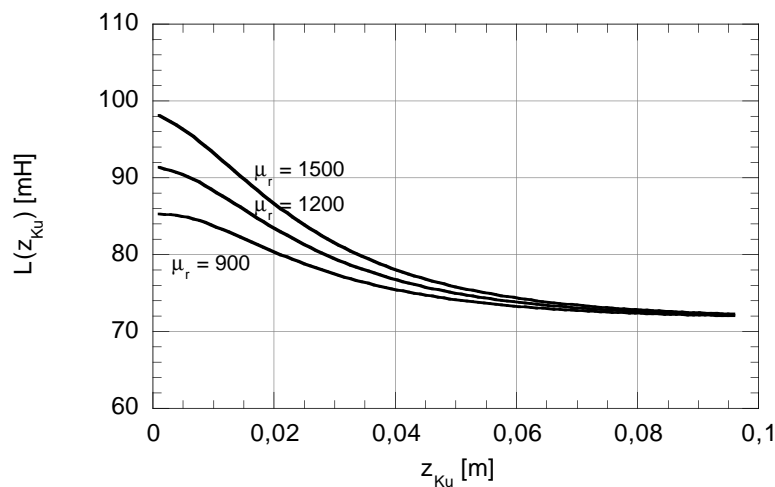


Abbildung 23 Induktivitätsänderung ($\mu_r = 900, 1200, 1500$)

Die Graphen zeigen eine deutliche Abhängigkeit der Induktivität der Spule vom Abstand zwischen Kugel und Spule. Diese ist erwartungsgemäß nichtlinear. Deshalb wird der Zusammenhang bei der Ermittlung der Übertragungsfunktion des Systems (Abschnitt 0) linearisiert.

Um nicht mit zu kleinen Induktivitäten zu arbeiten sollten Windungszahl und Spulenlänge groß gewählt werden. Für die Erfassung der Regelgröße ist der Gradient der Funktion $L(z_{ku})$ bedeutsam. Im Arbeitspunkt der Regelung sollte dieser groß sein, da so die Kugelposition genauer erfaßt werden kann. Das spricht dafür, die Permeabilität des Kugelmaterials groß zu wählen und eine im Verhältnis zum Spulenradius große Kugel zu verwenden. Andererseits muß der Arbeitspunkt in einem möglichst linearen Bereich liegen, da sonst die Abweichung der wahren Systemparameter von denen des linearisierten Systems zu groß sind.

Kraft auf die Kugel

Die Energiedichte w des magnetischen Feldes kann als Druck verstanden werden [Dölling, S.64]

$$\frac{dW}{dV} = \frac{B^2}{2\mu} = p_m \quad (0.25)$$

Ein Magnetfeld bewirkt auf eine zu ihm parallele Fläche A die Kraft

$$F_M = \frac{B^2}{2\mu} A \quad (0.26)$$

Wird für die magnetische Induktion an der der Spule zugewandten Kugeloberfläche nach Gleichung (0.20)

$$B = B_a = \mu_0 \frac{NI}{2l} e^{-\frac{z_{Ku}}{R_{Sp}}} \quad (0.27)$$

angesetzt, so ist für die Kraft auf die Kugel folgende grobe Abschätzung geeignet [Dölling, S.83]

$$F_M \approx \mu_0 \frac{(NI)^2}{8l^2} e^{-\frac{2z_{Ku}}{R_{Sp}}} \pi R_{Ku}^2 \quad (0.28)$$

Die magnetische Kraft auf die Kugel ist umso größer, je näher die Kugel der Spule ist. Ihr Anstieg in Abhängigkeit von der Kugelposition ist nichtlinear.

Die Abschätzung zeigt, daß die Kraft quadratisch mit der Windungszahl und dem Spulenstrom steigt. Vergrößerung der Spulenlänge zieht jedoch eine Verkleinerung der Kraft nach sich, weshalb im Experiment eine kurze Spule verwendet werden soll.

Je größer das Verhältnis Kugelradius zu Spulenradius gewählt wird, desto größer sind die Kraft und der Gradient der Funktion $F(z_{Ku})$ (Abbildung 24).

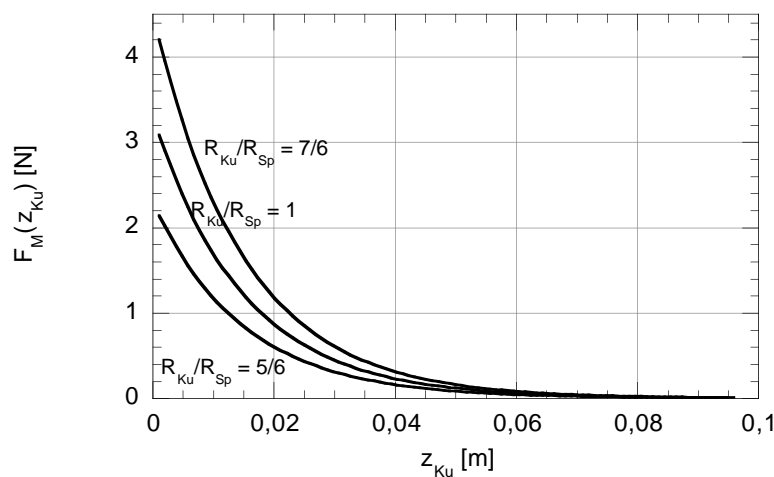


Abbildung 24 Kraftänderung ($R_{Ku}/R_{Sp} = 5/6, 1, 7/6$)

Übertragungsfunktion des Systems

Das Spule-Kugel-System sieht im Blockschaltbild folgendermaßen aus.

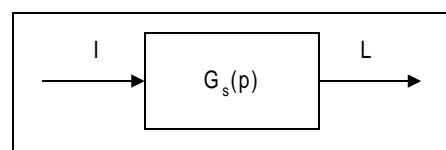


Abbildung 25 Blockschaltbild des Systems

Im Weiteren sollen die Zusammenhänge im Block untersucht werden.

Zu beachten ist, daß die Induktivität - die für den einfachen Fall einer Spule vom Strom unabhängig ist - im betrachteten Fall vom Strom I maßgeblich beeinflußt wird. Dies kommt durch die Rückwirkung zustande, die die Kugel bewirkt: Bei Vergrößerung des Spulenstroms vergrößert sich der magnetische Fluß nicht proportional, wie es durch den Zusammenhang $\phi = LI$ mit $L = \text{const.}$ beschrieben wird. Vielmehr erhöht sich der Fluß durch die Spule zusätzlich um den durch das Feld der Kugel hervorgerufenen Fluß. Verstärkt wird der Effekt dadurch, daß sich die Kugel bei Stromerhöhung der Spule nähert. Die Übertragungsfunktion des Systems lautet

$$G_s(p) = \frac{L}{I} \quad (0.29)$$

Da die Beziehungen zwischen Induktivität, Strom, Kugelabstand und Kraft auf die Kugel nichtlinear sind, ändern sich die Systemparameter bei merklicher Veränderung der Kugelposition. Um die Regelung mit linearen Reglern aufbauen zu können, müssen die Zusammenhänge um einen *Arbeitspunkt* (Index *AP*) linearisiert und die Regelung für diesen ausgelegt werden. Damit ergibt sich das Problem, daß die Gleichungen nur noch für kleine Abweichungen um den Arbeitspunkt Gültigkeit besitzen. Wie groß diese Abweichungen sein dürfen wird in Abschnitt 0 untersucht.

Zusammenhang zwischen Kugelposition und Spulenstrom

Für die Herleitung der Übertragungsfunktion sollen zunächst die Kräfte betrachtet werden, die auf die Kugel wirken. Über diese kann eine Verbindung zwischen Kugelposition und Spulenstrom hergestellt werden.

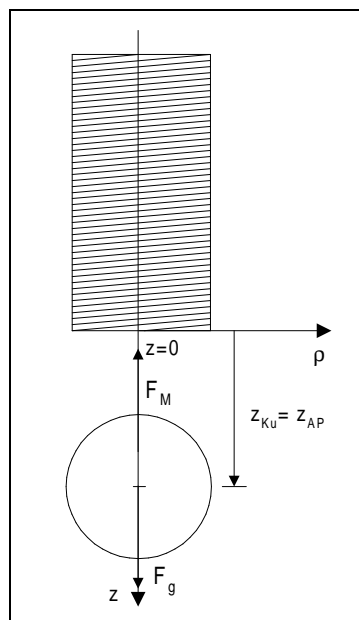


Abbildung 26 Auf die Kugel wirkende Kräfte (Arbeitspunkt)

Die durch das Magnetfeld bewirkte Kraft auf die Kugel - die Magnetkraft F_M - ändert sich mit dem Abstand der Kugel von der Spule.

Im Arbeitspunkt, in dem die Kugel beschleunigungsfrei schwebt, wird die Gewichtskraft F_g durch die Magnetkraft F_M kompensiert.

$$F_M|_{AP} = F_g = mg \quad (0.30)$$

Sobald die Kugel aus der Sollage ausgelenkt wird, beziehungsweise die beiden Kräfte differieren, wirkt auf die Kugel eine Beschleunigungskraft $m\ddot{z}_{Ku}$. Es gilt dann

$$m\ddot{z}_{Ku} = -F_M + F_g \quad (0.31)$$

Da uns nur das Verhalten in der Nähe des Arbeitspunktes interessiert, sollen im Folgenden alle Größen auf diesen bezogen werden.

$$\begin{aligned} F_M &= F_g + \Delta F_M \\ z_{Ku} &= z_{AP} + \Delta z_{Ku} \\ I &= I_{AP} + \Delta I \end{aligned} \quad (0.32)$$

Die Δ -Größen beschreiben somit Abweichungen der Größen I , z_{Ku} und F_M vom Arbeitspunkt. Gleichung (0.31) vereinfacht sich dadurch zu

$$m\Delta\ddot{z}_{Ku} = \Delta f_M \quad (0.33)$$

Die Kraft ΔF_M hängt nichtlinear vom Spulenstrom und der Kugelposition ab. Für kleine Signaländerungen um den Arbeitspunkt läßt sich jedoch mit

$$\Delta F_M \approx \left. \frac{\partial F_M}{\partial I} \right|_{AP} (I - I_{AP}) + \left. \frac{\partial F_M}{\partial z_{Ku}} \right|_{AP} (z_{Ku} - z_{AP}) \quad (0.34)$$

($\Delta F_M|_{AP} = 0$) die lineare Bewegungsgleichung

$$\Delta\ddot{z}_{Ku} = -\frac{1}{m} C_{FI} \Delta I + \frac{1}{m} C_{Fz} \Delta z_{Ku} \quad (0.35)$$

verwenden. Dabei sind

$$\begin{aligned} C_{FI} &= \left. \frac{\partial F_M}{\partial I} \right|_{AP} > 0 & [C_{FI}] &= \frac{N}{A} \\ C_{Fz} &= -\left. \frac{\partial F_M}{\partial z_{Ku}} \right|_{AP} > 0 & [C_{Fz}] &= \frac{N}{m} \end{aligned} \quad (0.36)$$

Systemparameter, die für den gewählten Arbeitspunkt (z_{AP} , I_{AP}) ermittelt werden müssen. Die magnetische Kraft auf die Kugel nimmt zwar mit wachsendem Abstand von der Spule ab. Das Vorzeichen von C_{Fz} wird jedoch ebenfalls positiv gewählt, um die Rechnungen übersichtlicher zu gestalten.

Zusammenhang zwischen Induktivität und Kugelposition

In Abschnitt 0 wurde die Regelgröße *Induktivität* als Funktion der Kugelposition näherungsweise hergeleitet. Dieser Zusammenhang ist jedoch keineswegs linear. Mit der auf den Arbeitspunkt bezogenen Induktivität

$$L(z_{Ku}) = L|_{AP} + \Delta L(z_{Ku}) \quad (0.37)$$

stellen wir diese - unter Annahme kleiner Änderungen - ebenfalls als lineare Funktion der Kugelposition dar

$$\Delta L(z_{Ku}) \approx -C_{Lz} \Delta z_{Ku} \quad (0.38)$$

Der Systemparameter C_{Lz} lautet

$$C_{Lz} = - \left. \frac{\partial L}{\partial z_{Ku}} \right|_{AP} > 0 \quad [C_{Lz}] = \frac{H}{m} \quad (0.39)$$

Auch die Induktivität nimmt mit wachsendem Abstand ab.

Übertragungsfunktion

Die um den Arbeitspunkt linearisierte Übertragungsfunktion des Kugel-Spule-Systems erhält man nach Laplacetransformation der Gleichungen (0.35) und (0.38).

$$\frac{\Delta z_{Ku}}{\Delta I} = \frac{-C_{FI}}{mp^2 - C_{Fz}} \quad (0.40)$$

$$\frac{\Delta L}{\Delta I} = -C_{Lz} \frac{\Delta z_{Ku}}{\Delta I} \quad (0.41)$$

zu

$$G_s(p) = \frac{C_{Lz} C_{FI}}{m} \cdot \frac{1}{p^2 - \frac{C_{Fz}}{m}} = K_s \frac{1}{T_s^2 p^2 - 1} \quad (0.42)$$

Zur Vereinfachung wurden folgende Abkürzungen eingeführt:

$$K_s = \frac{C_{Lz} C_{FI}}{C_{Fz}} \quad [K_s] = \frac{H}{A} \quad (0.43)$$

$$T_s = \sqrt{\frac{m}{C_{Fz}}} \quad [T_s] = s$$

Damit nimmt das linearisierte System die in Abbildung 27 dargestellte Struktur an.

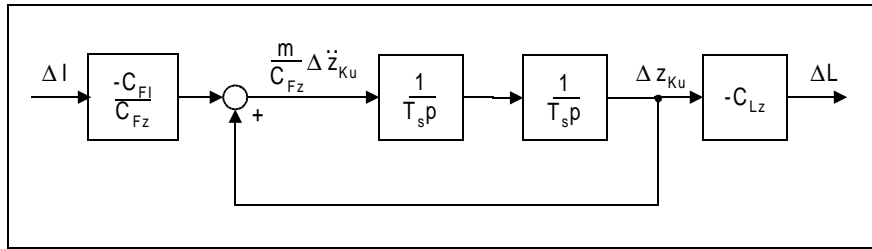


Abbildung 27 Blockschaltbild des linearisierten Kugel-Spule-Systems

Die Übertragungsfunktion gibt bereits Auskunft über wichtige Systemeigenschaften.

1. Die *Pole* der Übertragungsfunktion liegen bei

$$p_{1/2} = \pm \sqrt{\frac{C_{Fz}}{m}} = \pm \frac{1}{T_s} \quad (0.44)$$

Sie sind reell, wobei einer rechts der Imaginären Achse liegt. Nach Abschnitt 0 bedeutet das Instabilität des Systems.

2. Die *Sprungantwort* des Systems

$$h(t) = K_s \left(-1 + \frac{1}{2} \left(e^{+\frac{1}{T_s}t} + e^{-\frac{1}{T_s}t} \right) \right) \quad (0.45)$$

bestätigt dieses Verhalten.

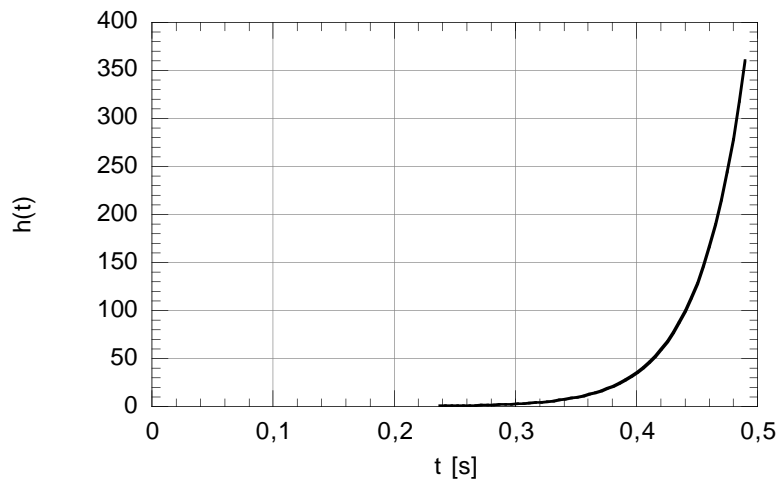


Abbildung 28

Sprungantwort des Spule-Kugel-System ($C_{Lz} = 0.33 \text{ H/m}$, $C_{Fz} = 29.75 \text{ N/m}$, $C_{Fl} = 0.19 \text{ N/A}$, $m = 44 \text{ g}$)

Die Systemparameter wurden aus den Näherungen für Kraft auf die Kugel und Induktivität der Spule für oben genannte Werte ermittelt. Ihr Verlauf in Abhängigkeit von Kugelposition und Spulenstrom ist in Abbildung 29 dargestellt.

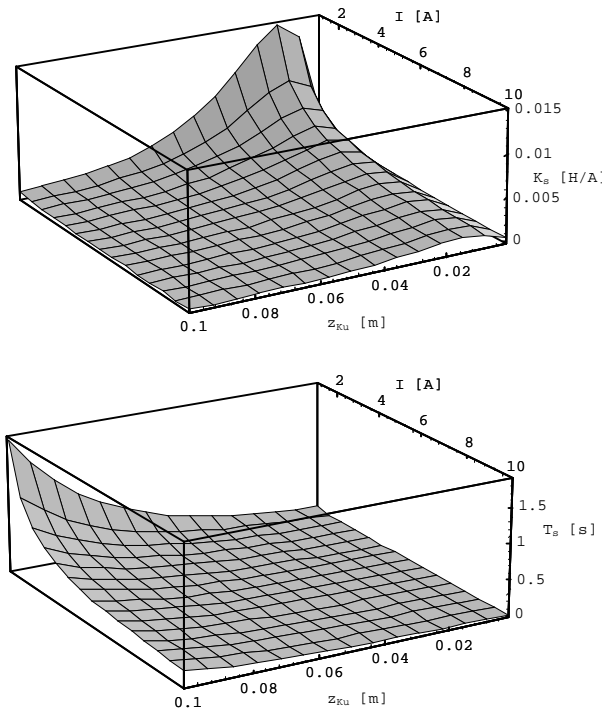


Abbildung 29 Abhängigkeit der Systemparameter K_s , T_s von Kugelposition und Spulenstrom im Arbeitspunkt

Die Bedeutung der Parameter ist folgende: Falls das System im Regelkreis stabilisiert wird, ist K_s ein Faktor der gesamten Kreisverstärkung,⁹ während T_s eine Verzögerung des Signaldurchflusses bewirkt. Für das instabile System sind solche Aussagen nicht sinnvoll, da Verstärkung und Verzögerung keine Bedeutung haben.

Der Faktor K_s fällt mit steigendem Spule-Kugel-Abstand. Das heißt, daß die Verstärkung des Systems abnimmt. Dasselbe gilt für die Abhängigkeit vom Strom. Die Zeitkonstante T_s hingegen wächst mit Vergrößerung des Abstandes, was bedeutet, daß die Strecke „langsamer“ wird. Bei Erhöhung des Stromes nimmt sie ab.

Regelung

Aufbau des Regelkreises

Der Regelkreis besteht im Wesentlichen aus folgenden Funktionseinheiten:

1. Die Regelstrecke bildet das *Spule-Kugel-System*. Das Übertragungsverhalten ist bereits in Abschnitt 0 eingehend betrachtet worden.
2. Der Istwert der Regelgröße wird durch *Messung der Induktivität* der Spule ermittelt. Das Meßglied wandelt die Induktivität in eine ihr proportionale Spannung U_{List} um. Das Verfahren ist in Abschnitt 0 dargestellt.
3. Der Vergleich dieser Spannung mit der für den Arbeitspunkt vorgegebenen Spannung U_{Lsoll} findet im *Regler* statt. Dort wird auch der Wert ermittelt, um den der Steuerstrom I_{st}

⁹ K_s ist rein formal der Betrag des Verstärkungsfaktors des System, denn betrachtet man den Grenzwert der Übertragungsfunktion, wenn p gegen null strebt, so erhält man $-K_s$. Hierin liegt auch der Grund, warum das Nyquist-Kriterium über dieses System keine Aussagen macht [Föllinger, S.189ff].

geändert werden muß, damit die Kugel im Arbeitspunkt schwebt. Am Reglerausgang steht dieser als proportionale Steuerspannung U_{st} bereit.

4. Da der Ausgang des Meßgliedes und der Regler auf einem niedrigeren Leistungsniveau als die Spule liegen, muß ein Leistungsverstärker vor den Spulenkreis geschaltet werden (*Stellglied*). Dieser arbeitet als spannungsgesteuerte Stromquelle. An seinem Eingang werden die Steuerspannung, die Hilfsspannung U_{AP} für die Arbeitspunkteinstellung und die Meßspannung U_m addiert.

Somit gelangt man zu dem in Abbildung 30 gezeigten Aufbau.

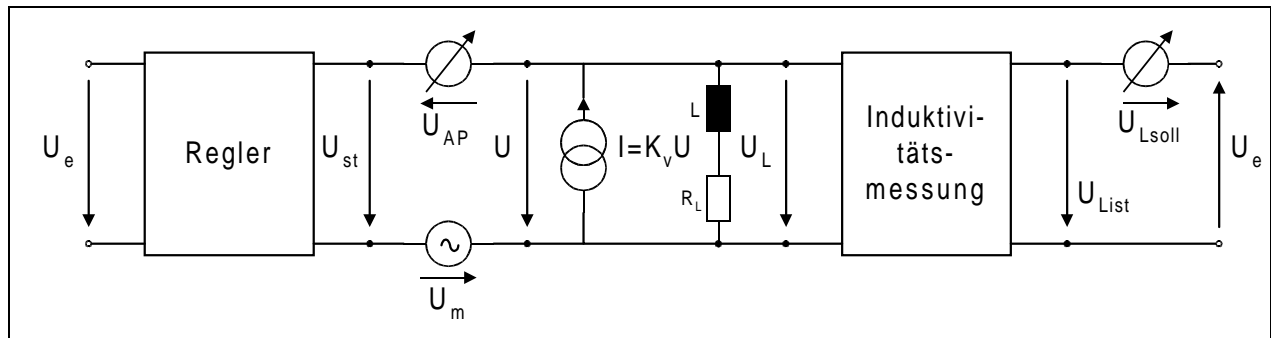


Abbildung 30 Elektrisches Ersatzbild des Regelkreises

Das Blockschaltbild des Regelkreises ist in Abbildung 31 dargestellt. Auf Grund der Beschränkung auf Kleinsignale fallen wegen $\Delta U_{L\text{Soll}} = 0$ und $\Delta U_{AP} = 0$ die Blöcke für Sollwertvorgabe und Arbeitspunkteinstellung weg.

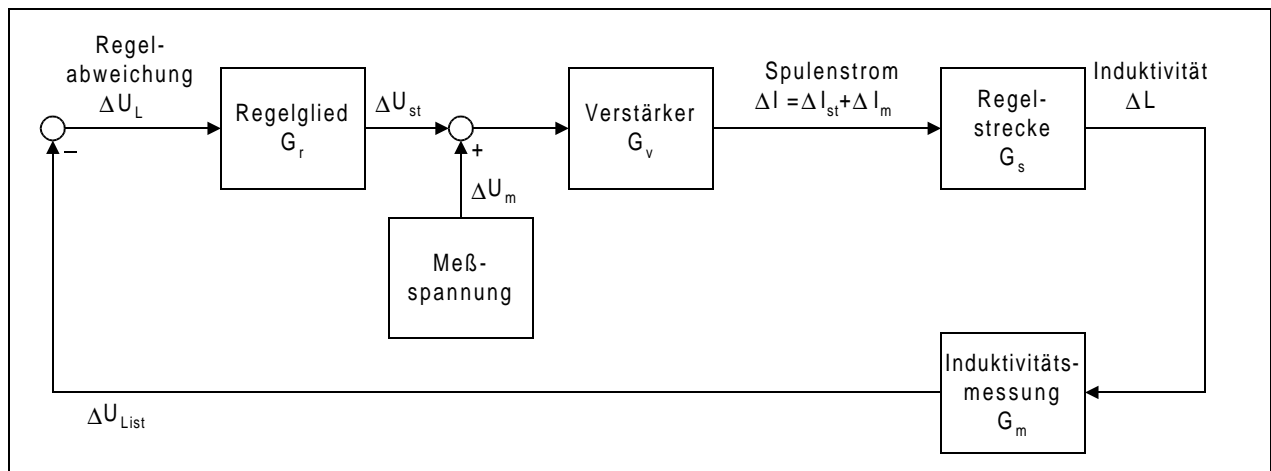


Abbildung 31 Blockschaltbild der um den Arbeitspunkt linearisierten Regelung

Übertragungsfunktionen der Regelkreiskomponenten

Stellglied

Das Stellglied dient der Stromversorgung der Spule. Da das Leistungsniveau der Spule (einige Watt) höher als das der übrigen Regelkreiskomponenten (Operationsverstärkerschaltungen) ist, muß das Stellglied verstärkende Wirkung haben. Seine Übertragungsfunktion soll

$$G_v(p) = \frac{I}{U} = K_v \quad [K_v] = S \quad (0.46)$$

lauten mit der Eingangsspannung $U = U_{AP} + U_{st} + U_m$ und dem Ausgangsstrom $I = I_{AP} + I_{st} + I_m$. Es handelt sich also um proportional wirkendes Glied mit dem Verstärkungsfaktor K_v .

Induktivitätsmessung

Der Istwertgeber sollte idealerweise ebenfalls als P-Glied wirken, das heißt einen der Induktivität der Spule proportionalen Spannungswert liefern

$$G_{m_{ideal}}(p) = \frac{U_{List}}{L} = K_m \quad [K_m] = \frac{A}{s} \quad (0.47)$$

An der luftgefüllten Spule ist der Spannungsabfall durch die Induktivität L , den ohmschen Widerstand des Spulendrahtes R_L , sowie die Frequenz ω des Stromes bestimmt.

Für die Rechnungen kann das Ersatzbild Abbildung 32 verwendet werden.

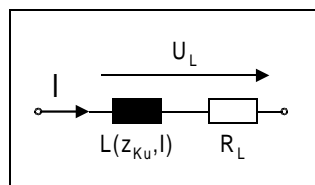


Abbildung 32 Ersatzbild der Spule

Geht man von sinusförmigen Größen aus, so ergibt sich

$$U_L = L \frac{dI}{dt} + R_L I \quad (0.48)$$

Hieraus könnte die Induktivität prinzipiell berechnet werden. Neben Stromamplitude und Frequenz muß dann allerdings auch der ohmsche Widerstand der Spule bekannt sein. Dieser ändert sich jedoch mit Erwärmung der Spule im Dauerbetrieb. Deshalb ist es ratsam, seinen Einfluß bei der Induktivitätsmessung zu beseitigen.

Dies geschieht nach folgendem Prinzip:

Die Spule wird mit einem dreieckförmigen Meßstrom I_m der Frequenz $f_m = 1/T_m$ und der Amplitude \hat{I}_m gespeist.

$$I_m = \begin{cases} \left(\frac{4}{T_m} t - 1 \right) \hat{I}_m & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{T_m}{2} \\ \left(-\frac{4}{T_m} t + 3 \right) \hat{I}_m & \text{für } \frac{T_m}{2} < t \leq T_m \end{cases} \quad (0.49)$$

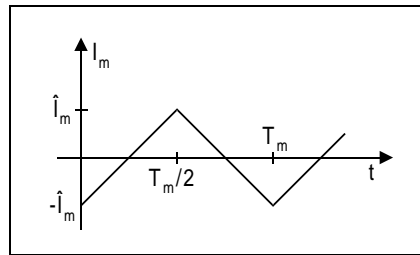


Abbildung 33 Verlauf des Strom zur Induktivitätsmessung

Nach Gleichung (0.48) fällt an der Spule die Spannung

$$U_L = \begin{cases} \left(L \frac{4}{T_m} + R_L \left(\frac{4}{T_m} t - 1 \right) \right) \hat{I}_m & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{T_m}{2} \\ \left(-L \frac{4}{T_m} + R_L \left(-\frac{4}{T_m} t + 3 \right) \right) \hat{I}_m & \text{für } \frac{T_m}{2} < t \leq T_m \end{cases} \quad (0.50)$$

ab.

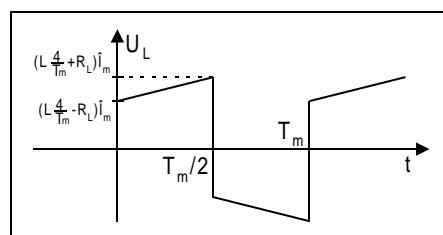


Abbildung 34 Durch den Meßstrom an der Spule hervorgerufener Spannungsabfall

Die Aufgabe des Istwertgebers besteht nun darin, diese Spannung gleichzurichten und den Mittelwert zu bilden. Denn dieser ist direkt proportional zur Induktivität.

Die Gleichrichtung liefert die Spannung

$$|U_L| = \left(L \frac{4}{T_m} + R_L \left(\frac{4}{T_m} t - 1 \right) \right) \hat{I}_m \quad \text{für } n \frac{T_m}{2} \leq t < (n+1) \frac{T_m}{2}, n = 0, 1, \dots \quad (0.51)$$

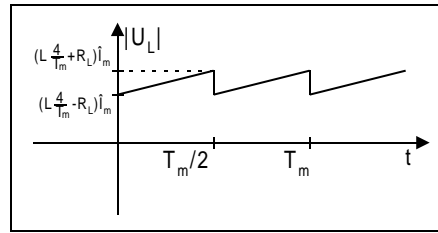


Abbildung 35 Gleichgerichtete Meßspannung

und Mittelwertbildung schließlich

$$U_{List} = \frac{2}{T_m} \int_0^{T_m/2} |U_L| dt = \frac{4}{T_m} \hat{I}_m L \quad (0.52)$$

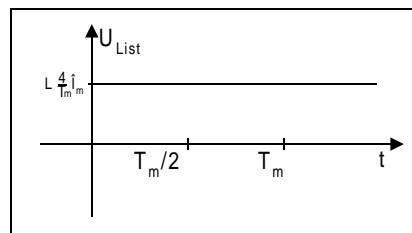


Abbildung 36 Ausgangsspannung des Istwertgebers

Die Spannung am Ausgang des Istwertgebers ist demnach proportional zur Induktivität mit dem Faktor

$$K_m = \frac{4}{T_m} \hat{I}_m \quad [K_m] = \frac{A}{s} \quad (0.53)$$

Im Weiteren wird angenommen, daß $K_m = 1 \text{ A/s}$ gewählt wird.

Bei der Herleitung wurde vorausgesetzt, daß die Spule allein vom Meßstrom durchflossen wird. In Wirklichkeit werden jedoch auch der Steuerstrom I_{st} und der Hilfsstrom I_{AP} vorhanden sein und damit den Verstärkungsfaktor des Istwertgebers mitbestimmen. Da Frequenz und Amplitude des Steuerstromes weder bekannt sind noch als konstant angenommen werden können, muß sein Einfluß vor der Messung eliminiert werden. Dies kann mit Hilfe eines vorgeschalteten Hochpasses geschehen. Da der Hilfsstrom konstant ist, wird auch er die Messung nicht beeinflussen.

Für die Realisierung der Induktivitätsmessung sind folgende Komponenten nötig:

1. Die Meßspannung U_m wird von einem Dreiecksgenerator erzeugt. Sie hat die Amplitude U_m und die Frequenz ω_m . Diese muß sehr viel höher (kHz-Bereich) als die der Steuerspannung sein, damit der vom Meßstrom hervorgerufene Spannungsabfall U_{Lm} von denen der anderen Spulenstromanteilen getrennt werden kann und die Kugelposition nicht gestört wird.

Für den Meßstrom gilt

$$I_m = K_v U_m \quad (0.54)$$

2. Der Istwertgeber kann in die Blöcke Hochpaß, Gleichrichter und Tiefpaß (Mittelwertbilder) zerlegt werden. Genauer untersucht werden müssen die beiden Filterkomponenten, weil sie wegen ihrer frequenzabhängigen Übertragungsfunktionen Einfluß auf das Verhalten des Regelkreises haben können.

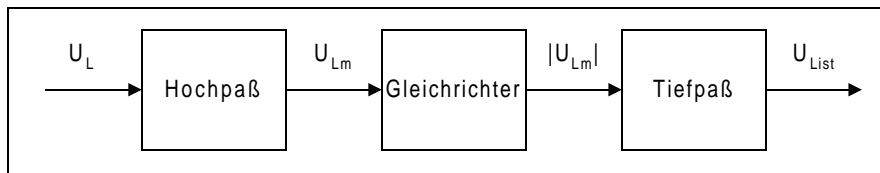


Abbildung 37 Blockschaltbild des Istwertgebers

Der *Hochpaßfilter* hat die Übertragungsfunktion

$$G_{HP}(p) = \frac{U_{Lm}}{U_L} = \frac{T_{HP} p}{1 + T_{HP} p} \quad (0.55)$$

(erster Ordnung) mit der Grenzfrequenz $\omega_{HP} = 1/T_{HP}$. Es handelt sich folglich um ein verzögernd differenzierendes (DT₁-) Glied, bei dem Differenzierzeit und Verzögerungszeit identisch sind. Das Verhalten ist in Abschnitt 0 beschrieben.

Für eine saubere Signaltrennung muß gelten

$$\omega_{st} \ll \omega_{HP} < \omega_m \quad (0.56)$$

Die Grenzfrequenz ω_{HP} wird einige 100 Hz betragen, sodaß T_{HP} gegenüber den anderen Zeitkonstanten zu vernachlässigen ist.

Für den *Tiefpaßfilter* (ebenfalls erster Ordnung) gilt

$$G_{TP}(p) = \frac{U_{List}}{|U_{Lm}|} = \frac{1}{1 + T_{TP} p} \quad (0.57)$$

(siehe Abschnitt 0, PT₁-Glieder).

Die Grenzfrequenz $\omega_{TP} = 1/T_{TP}$ muß die Bedingung

$$\omega_{TP} < \omega_m \quad (0.58)$$

erfüllen. Da allein der Gleichspannungsanteil durchgelassen werden soll wird ω_{TP} wenige Hertz betragen.

Reglerentwurf

Vorrangiges Ziel dieses Abschnittes ist es, eine Reglerstruktur zu finden, mit der es möglich ist, das Spule-Kugel-System zu stabilisieren.

Dieser Prozeß vollzieht sich iterativ. Das heißt, es wird eine Reglerübertragungsfunktion gewählt und daraus die Übertragungsfunktion des offenen Kreises ermittelt. Aus dieser lassen sich Rückschlüsse auf das Verhalten des geschlossenen Kreises ziehen. Das Hurwitz-Kriterium wird dabei auf einfache Weise Aufschluß darüber geben, ob der Regelkreis stabil ist und in welchen Grenzen die Parameter der Reglerübertragungsfunktion zu wählen sind.

Erweist sich der gewählte Regler als unbrauchbar, so ist der Vorgang zu wiederholen.

Für einen Regler, der der Stabilitätsforderung genügt, sind die Parameter anschließend so zu optimieren, daß auch Forderungen an Ausregelzeit, stationäre Genauigkeit und Überschwingweite befriedigt werden.

Das Zeitverhalten des Regelkreises wird während dieser Phase im Rechner simuliert. Soweit nicht anders gesagt liegen den *Simulationen* (Anhang 0) folgende Werte zugrunde:

Stellglied: $K_v = 2 \text{ S}$

Spule-Kugel-System:¹⁰ $C_{Lz} = 0.33 \text{ H/m}$, $C_{Fz} = 29.75 \text{ N/m}$, $C_{FI} = 0.19 \text{ N/A}$, $m = 44 \text{ g}$
 $\rightarrow K_s = 2.1 \cdot 10^{-3} \text{ H/A}$, $T_s = 38 \text{ ms}$

Meßglied: $K_m = 1 \text{ A/s}$, $T_{HP} = 1.25 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ ($\omega_{HP} = 800 \text{ Hz}$), $T_{TP} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ ($\omega_{HP} = 200 \text{ Hz}$)

Das bedeutet, daß die Amplitude der Meßspannung (ω im kHz-Bereich) bei der Mittelwertbildung mindestens auf 20 % heruntergedämpft wird. Die Amplitude der Steuerspannung ($\omega < 100 \text{ Hz}$) wird am Eingang des Istwertgebers auf mindestens 12% heruntergedämpft.

Die *Grafiken* zeigen jeweils den Verlauf der Induktivität nach einem Sollwertsprung um 1 V zur Zeit $t = 0 \text{ s}$ ($\Delta U_{lsoll} = \sigma(t)$).

Verkürzter offener Kreis

Beim Reglerentwurf kann zunächst davon ausgegangen werden, daß die Induktivitätsmessung proportional wirkt, denn bei entsprechender Wahl der Grenzfrequenzen für die Filter ist die Störung des Meßwertes durch Regel- und Meßsignal gering. Da die Meßspannung wegen der hohen Frequenz auch die Kugelposition nicht beeinflußt, bleibt sie beim Reglerentwurf unberücksichtigt.

Die Nennerzeitkonstante T_{HP} des Hochpasses liegt mindestens eine Größenordnung unter denen des Spule-Kugel-Systems T_s und des Tiefpasses T_{TP} , sodaß die Zeitvorgänge entsprechend schneller abklingen. Deshalb ist zu erwarten, daß die verzögernden Anteile des Systems und des Tiefpasses das Regelkreisverhalten dominieren. Vorerst soll beim Entwurf jedoch nur das System berücksichtigt werden. Durch Einbeziehung weiterer verzögernder

¹⁰ Es sind die Werte von S.44 zugrunde gelegt. Berechnet wurden die Systemparameter mit dem MATHEMATICA-Notebook in Anhang 0.

Elemente ändert sich an der Reglerstruktur qualitativ nichts. Lediglich die Reglerparameter sind auf die neue Situation einzustellen (Abschnitt 0).

Für den offenen Kreis erhalten wir mit dieser Vereinfachung nach (0.58) die Übertragungsfunktion

$$G_0(p) = G_r(p) \cdot K_v K_s \frac{1}{T_s^2 p^2 - 1} \cdot K_m = G_r(p) \cdot K \frac{1}{T_s^2 p^2 - 1} \quad (0.59)$$

wobei zur Vereinfachung der Gleichungen die Abkürzung $K = K_v K_s K_m$ ($= 4.3 \cdot 10^{-3}$ mit obigen Werten) eingeführt wird. Die Führungsübertragungsfunktion folgt aus (0.56).

Die Aufgabe besteht darin, ein geeignetes $G_r(p)$ zu finden.

P-Regler

Der Einsatz eines P-Reglers ($G_r(p) = K_r$) bedeutet, daß der Regelkreis lediglich geschlossen und der Amplitudengang um einen der Reglerv Verstärkung K_r entsprechenden dB-Betrag nach oben verschoben wird. Daß damit das System nicht zu stabilisieren ist, kann schnell an der charakteristischen Gleichung des geschlossenen Kreises $1 + G_0 = 0$ (0.66)

$$T_s^2 p^2 + K_0 - 1 = 0 \quad (0.60)$$

($K_0 = K_r K$) abgelesen werden. Wird K_r so gewählt, daß reelle Pole entstehen ($K_r \leq 1/K$), so ist der Regelkreis instabil. Vergrößerung von K_r über $1/K$ hinaus bringt lediglich Grenzstabilität, weil dann das entstehende konjugiert komplexe Polpaar entlang der Imaginären Achse der p -Ebene wandert.

Das Hurwitz-Kriterium liefert Hinweise auf mögliche Alternativen. Die Hurwitz-Determinante lautet

$$H = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ T_s^2 & K_0 - 1 \end{vmatrix} \quad (0.61)$$

Die interessierenden Determinanten sind alle null, was daran liegt, daß die charakteristische Gleichung keinen Term erster Ordnung aufweist. Ein D- beziehungsweise DT_1 -Anteil allein in der Reglerübertragungsfunktion führt zwar zu einer charakteristischen Gleichung, in der Terme aller Ordnungen vorhanden sind. Diese sind jedoch nicht alle positiv, was bedeutet, daß der Regelkreis ebenfalls instabil ist (negative Determinanten). Ebenso erzeugt ein I-Anteil alleine negative Determinanten.

Parallelschaltungen aus I- oder DT_1 -Anteil und proportionalem Anteil stellen weitere Möglichkeiten dar (PI-, PDT_1 -Regler). Auch mit einem PI-Regler kann das Stabilitätskriterium nicht erfüllt werden. Deshalb bildet ein PDT_1 -Regler die Grundlage für die weiteren Untersuchungen.

PDT_1 -Regler

Der Regler hat die Übertragungsfunktion

$$G_r(p) = K_r \left(1 + \frac{T_D p}{1 + T p} \right) = K_r \frac{1 + (T + T_D) p}{1 + T p} \quad (0.62)$$

Die Bedingungen für die Stabilitätsgrenze können wieder mit dem Hurwitz-Kriterium ermittelt werden. Die charakteristische Gleichung lautet

$$T_s^2 T p^3 + T_s^2 p^2 + (K_0(T_D + T) - T)p + K_0 - 1 = 0 \quad (0.63)$$

($K_0 = K_r K$). Für die Reglerparameter muß deshalb gelten

$$K_r > \frac{1}{K}, \quad T_D > 0, \quad T > 0 \quad (0.64)$$

Die letzten beiden Forderungen sind immer erfüllt. T_D und T können deshalb ausschließlich zur Erfüllung der Güteforderungen verwendet werden, ohne daß ihre Wahl die Stabilität gefährdet.

Mit der Zählerzeitkonstante $T_D + T$ kann eine Streckenzeitkonstante T_s kompensiert werden. Die Nennerzeitkonstante T bringt jedoch eine weitere Verzögerung mit sich.

Die Differenzier- und Verzögerungszeit des Reglers werden so eingestellt, daß sie in der Summe T_s ergeben. Da T möglichst klein sein soll, kann T_D nahe $T_s = 38$ ms liegen. Die Reglerverstärkung K_r wird dann so lange erhöht, bis ein stabiles Verhalten eintritt ($K_r > 233$).

In Abbildung 38 sind $T_D = 32$ ms, $T = 6$ ms und $K_r = 500, 700$ und 900 gewählt. Auch hier erkennt man, daß eine höhere Verstärkung eine größere stationäre Genauigkeit nach sich zieht. Außerdem bringt dies eine Tendenz zum Überschwingen mit sich, durch die aber der stationäre Wert schneller erreicht wird..

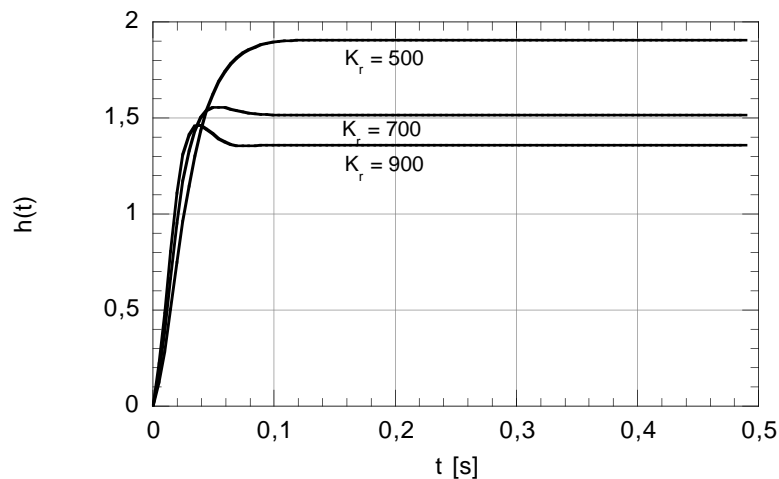


Abbildung 38 Sprungantwort ($T_D = 32$ ms, $T = 6$ ms, $K_r = 500, 700, 900$)

Die Schnelligkeit der Regelung hängt weiter von T_D ab. Wie Abbildung 39 zeigt, vergrößert sich die Ausregelzeit bei größerem T_D . Eine Verkleinerung der Differenzierzeit unter den Wert von T_s führt jedoch zu starkem Überschwingen.

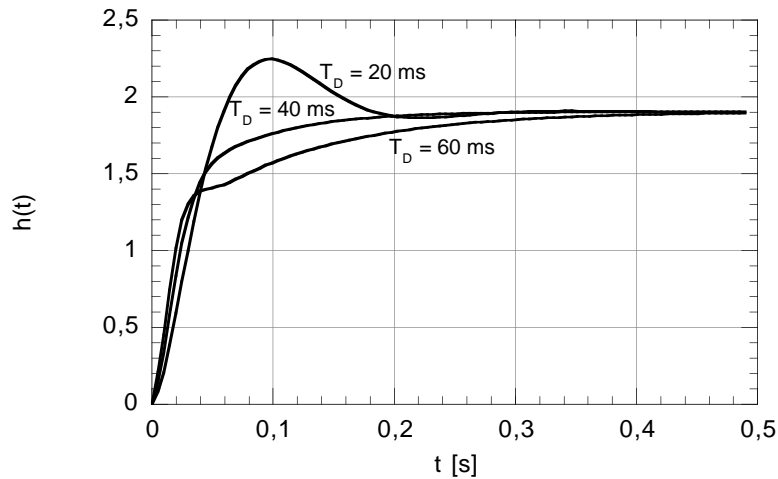


Abbildung 39 Sprungantwort ($T_D = 20, 40, 60 \text{ ms}$, $T = 6 \text{ ms}$, $K_r = 500$)

Für den weiteren Entwurf sollen K_r auf 1000 und T_D auf 32 ms festgesetzt werden. Damit ist der Regelkreis stabil. Durch die hohe Verstärkung bleibt genügend Spielraum zur Stabilitätsgrenze. Die Induktivität erreicht zwar schnell ihren stationären Wert, aber dieser entspricht nicht dem Sollwert. Um die bleibende Regelabweichung zu eliminieren muß nach Abschnitt 0 ein I-Anteil eingefügt werden. Dazu bestehen zwei Möglichkeiten: Entweder in Reihe (PI-PDT₁-Regler) oder parallel (PIDT₁-Regler) zum vorhandenen PDT₁-Regler.

PI-PDT₁-Regler

Es genügt nicht, ein einfaches Integrierglied in Reihe zu schalten, denn dieses destabilisiert - wie sich mit dem Hurwitz-Kriterium nachrechnen läßt - den Regelkreis. Man benötigt eine Parallelschaltung aus I- und P-Glied mit der Übertragungsfunktion

$$G(p) = 1 + \frac{1}{T_I p} \quad (0.65)$$

Die Integrierzeit T_I bestimmt, wie groß der Einfluß des I-Anteils gegenüber dem P-Anteil, der in diesem Fall das Signal unverstärkt passieren läßt, ausfällt. Wird T_I zu klein gewählt - das bedeutet große Verstärkung des Signals im I-Zweig - so wird er Kreis instabil (Abbildung 40, $T_I = 9.5 \text{ ms}$).

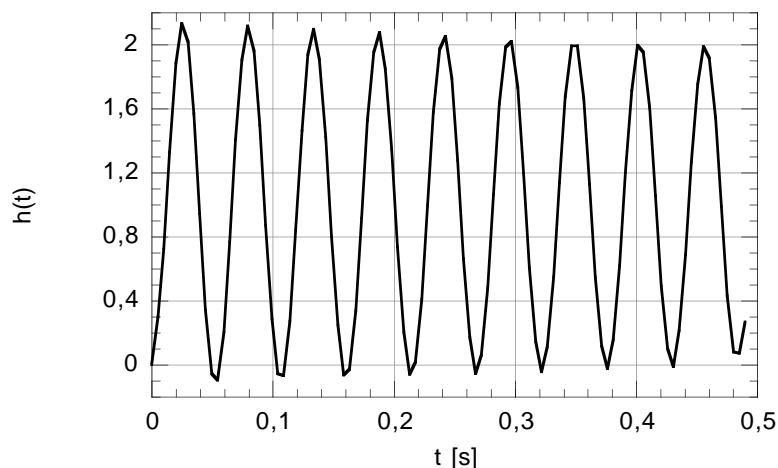


Abbildung 40 Kreis mit PI-PDT₁-Regler an der Stabilitätsgrenze

Mit Vergrößerung der Integrierzeit stabilisiert sich das Verhalten, und die Regelgröße nähert sich weniger schwingend ihrem Endwert (Abbildung 41). Auch die Überswingweite verringert sich, jedoch nicht wesentlich. Sie kann in Grenzen (bis auf ca. 50% des Endwertes) durch Steigerung der Reglerverstärkung oder der Differenzierzeit verkleinert werden.

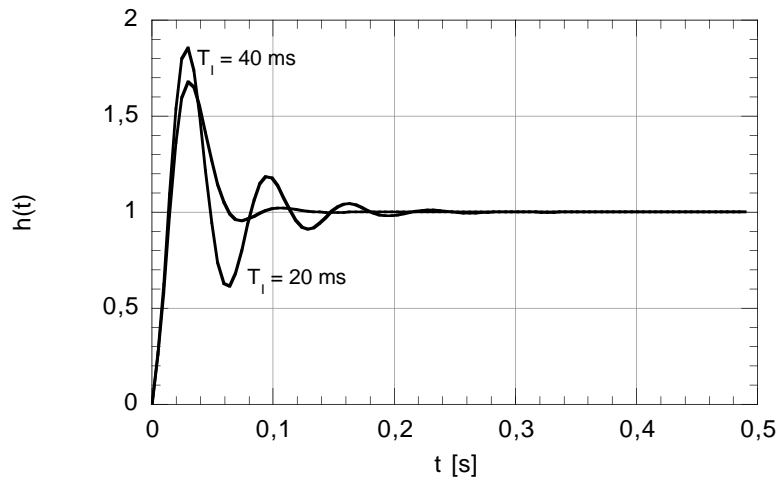


Abbildung 41 Sprungantwort ($T_I = 20, 40 \text{ ms}$, $T_D = 32 \text{ ms}$, $T = 6 \text{ ms}$, $K_r = 1000$)

PIDT₁-Regler

Aus der Parallelschaltung eines I-Anteils und des PDT₁-Reglers erhält man die Übertragungsfunktion des PIDT₁-Reglers

$$G_r(p) = K_r \left(1 + \frac{1}{T_I p} + \frac{T_D p}{1 + T p} \right) \quad (0.66)$$

mit $T_I = K_r T_I'$.

Bei dieser Schaltung greift der I-Anteil direkt in das Verhalten des PDT₁-Gliedes ein. Damit die Regelung durch die Parallelschaltung nicht zu langsam wird, muß die Verstärkung K_r als erstes erhöht werden. Die Integrierzeit kann dann genauso gewählt werden, wie in der PI-PDT₁-Regelung. Auch hier gilt, daß Vergrößerung von T_I die Regelung verlangsamt und Verkleinerung die Überswingweite vergrößert und die Tendenz zum Schwingen verstärkt.

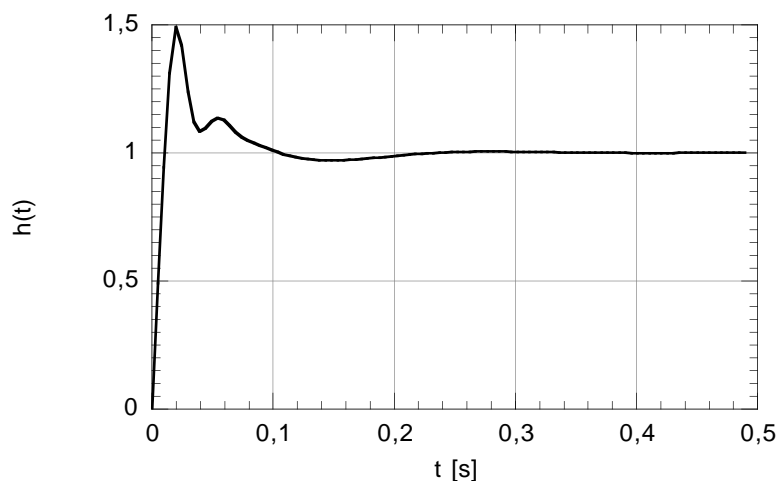


Abbildung 42 Sprungantwort ($T_I = 40 \text{ ms}$, $T_D = 32 \text{ ms}$, $T = 6 \text{ ms}$, $K_r = 2 \cdot 10^3$)

Die Abbildung zeigt einen günstigen Verlauf der Regelgröße nach Sprunganregung. Auch hier verschwindet die bleibende Regelabweichung. Die Überschwingweite konnte ebenfalls verringert werden. Sie stellt trotzdem noch ein Problem dar, da sie dazu führen kann, daß die Systemgrößen den linearen Bereich verlassen.

PI-PDT₁-Regler mit getrenntem Sollwertkanal

Die Überschwingweite kann dadurch verringert werden, daß dem PDT₁-Anteil eine abgeschwächte Sollgröße zugeführt wird. In Abbildung 43 ist dies durch den Verstärkerblock G_p dargestellt.

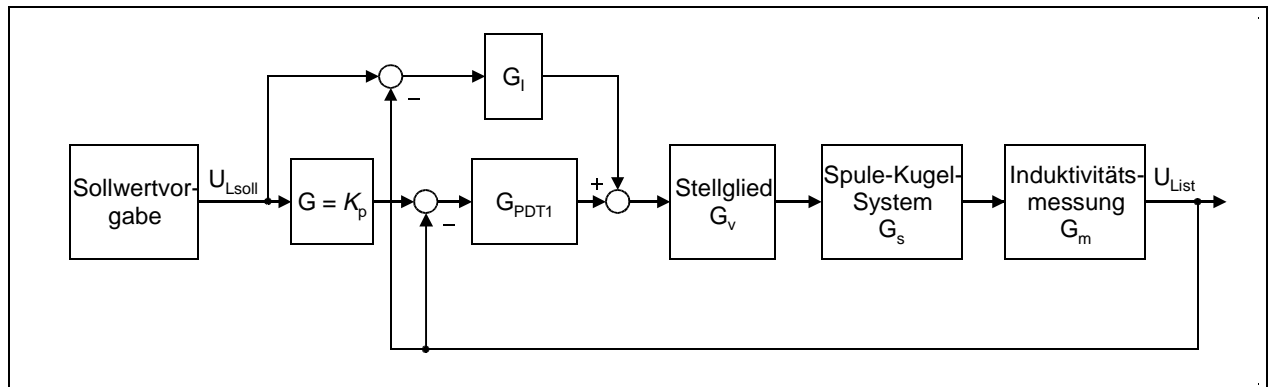


Abbildung 43 Aufbau der Regelung mit getrenntem Istwertkanal

Die Führungsübertragungsfunktion dieses Kreises lautet

$$\frac{U_{List}}{U_{Lsoll}} = \frac{G_v G_s G_m (K_p G_{PDT_1} + G_I)}{1 + G_v G_s G_m (G_{PDT_1} + G_I)} \quad (0.67)$$

Der Nenner entspricht dem der Führungsübertragungsfunktion des Regelkreises mit PIDT₁-Regler. Das bedeutet, daß sich am Stabilitätsverhalten nichts ändert, sondern nur am dynamischen Verhalten, das durch den Zähler beschrieben wird.

Die bleibende Regelabweichung des PDT₁-Anteils liegt bei diesem Aufbau unterhalb der Führungsgröße, weshalb sich die Regelgröße nicht von oben, sondern von unten der Führungsgröße nähert. In Abbildung 44 ist die Sprungantwort für die Extremwerte $K_p = 0$ und $K_p = 1$ dargestellt. Wird die Führungsgröße ungedämpft an den PDT₁-Regler weitergegeben ($K_p = 1$) erhält man den PIDT₁-Regler (siehe oben). Wird K_p verringert, nimmt die Überschwingweite ab, die Anstiegszeit jedoch zu. Bei $K_p = 0$ wird die Sollgröße nur noch dem I-Anteil zugeführt wodurch die Schnelligkeit des PDT₁-Anteils für die Regelung verloren geht.

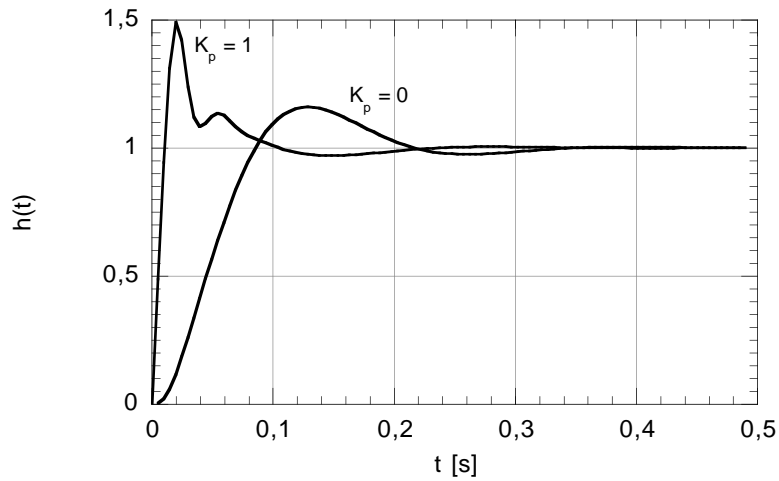


Abbildung 44 Sprungantwort ($T_I' = 2 \cdot 10^{-5} \text{ s}$, $T_D = 32 \text{ ms}$, $T = 6 \text{ ms}$, $K_r = 2 \cdot 10^3$, $K_p = 0, 1$)

Für $K_p = 0.3$ ist die Überschwingweite klein und die Regelung genügend schnell (Abbildung 45).

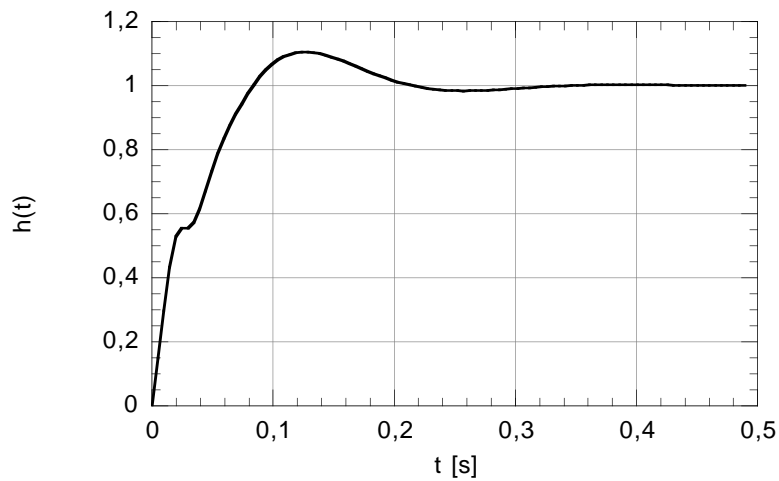


Abbildung 45 Sprungantwort ($T_I' = 2 \cdot 10^{-5} \text{ s}$, $T_D = 32 \text{ ms}$, $T = 6 \text{ ms}$, $K_r = 2 \cdot 10^3$, $K_p = 0.3$)

Die störende Schwingung zu Beginn des Einschwingvorgangs kann dadurch „geglättet“ werden, daß die Integrierzeit herabgesetzt wird.

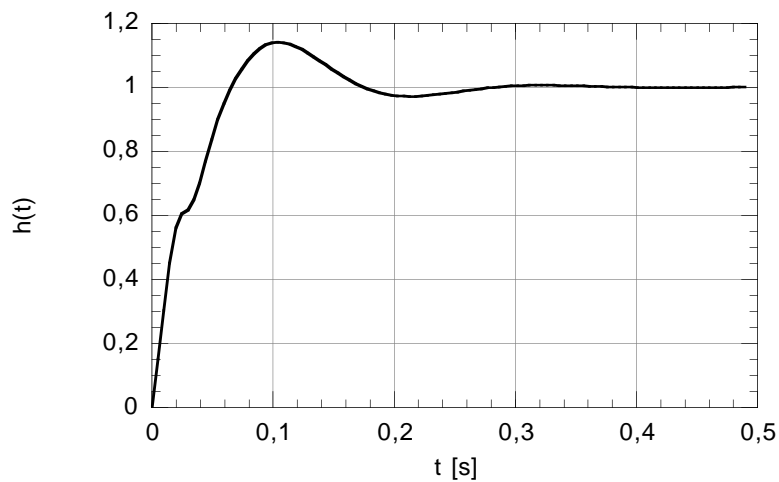


Abbildung 46 Sprungantwort ($T_I' = 1.5 \cdot 10^{-5} \text{ s}$, $T_D = 32 \text{ ms}$, $T = 6 \text{ ms}$, $K_r = 2 \cdot 10^3$, $K_p = 0.3$)

Abschließende Betrachtungen

In diesem Abschnitt sind Betrachtungen zur Qualität der Regelung zusammengefaßt. Diese beziehen sich auf Faktoren, die nicht in den Regelungsentwurf eingegangen sind. Folgende Fragen sollen geklärt werden:

1. Wie wirken sich die Verzögerungszeiten der Filter aus?
2. Können Störungen der Kugelposition ausgegelt werden?
3. Ist der Regelkreis auch bei Änderung der Systemparameter noch stabil?

Dazu soll lediglich der $PIDT_1$ -Regler mit getrenntem Sollwertkanal (Abbildung 46) herangezogen werden. Für die anderen Regler verlaufen die Untersuchungen äquivalent.

Berücksichtigung einer verzögernden Wirkung

Wegen der in der Induktivitätsmessung enthaltenen Filterkomponenten kann es im Regelkreis zu Verzögerungen beim Signalfluß kommen, die bisher noch nicht berücksichtigt wurden.

Um deren Einfluß festzustellen, wird in den Regelkreis ein PT_1 -Glied eingefügt. Der Verstärkungsfaktor kann eins gewählt werden. Ein abweichender wird mit dem Verstärkungsfaktor des Reglers so verrechnet, daß sich am gesamten Verstärkungsfaktor nichts ändert. Für die Betrachtung empfiehlt es sich als Verzögerungszeit einen möglichst großen Wert zu wählen, da der Einfluß mit der Größe dieser Zeit zunimmt.

Wählen wir als Verzögerungszeit den Wert $1/200$ s (T_{TP}), so beeinträchtigt das die Stabilität nicht (Abbildung 47).

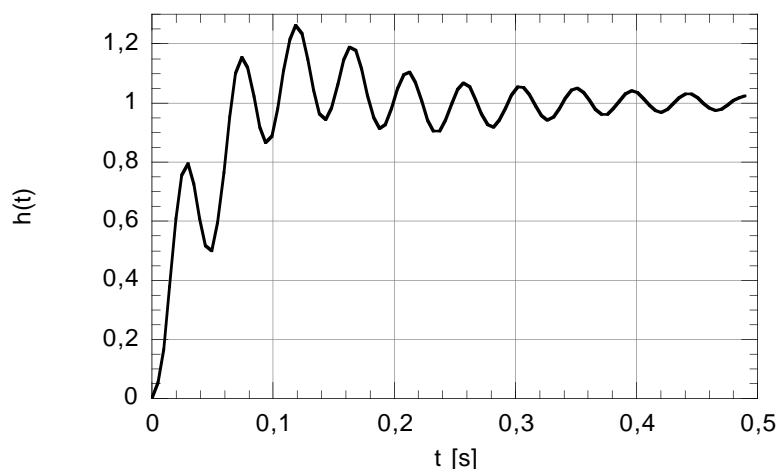


Abbildung 47 Sprungantwort des Kreises mit Verzögerung ($T_1 = 1/200$ s)

Es ist jedoch eine Tendenz zum Schwingen erkennbar, die sich mit Vergrößerung der Verzögerungszeit erhöht und schließlich zu Instabilität führt. Dieser kann entgegengewirkt werden, indem die Verstärkung des Regelkreises herabgesetzt wird. Dies allerdings in Grenzen, da eine zu geringe Verstärkung ebenfalls zur Instabilität führt. Hier genügt bereits ein Faktor 1.5. Wegen der Parallelschaltung ist sowohl der Verstärkungsfaktor des PDT_1 -Gliedes zu verringern, als auch die Integrierzeit des I-Gliedes zu erhöhen (was einer Erhöhung der Verstärkung dieses Gliedes gleichkommt).

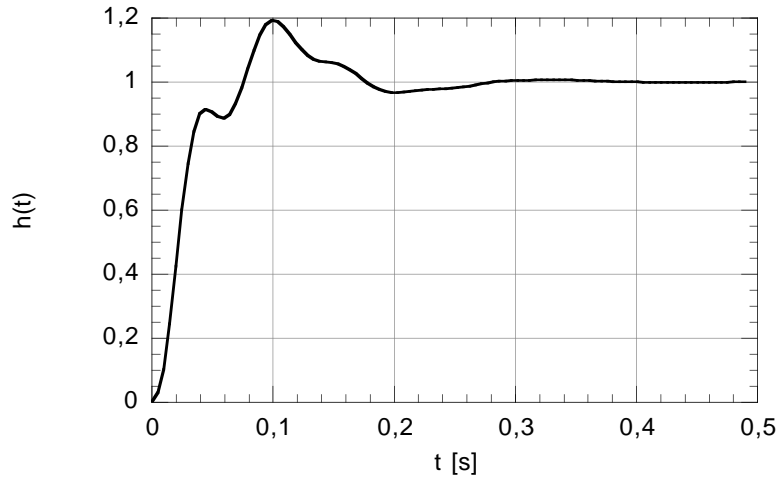


Abbildung 48 Sprungantwort des Kreises mit Verzögerung ($T_1 = 1/200$ s, $T_1' = 3 \cdot 10^{-5}$, $K_R = 1200$)

Berücksichtigung von Störungen der Kugelposition

Es sind einige Faktoren denkbar, die die Regelung störend beeinflussen könnten. Seien es äußere Magnetfelder oder sich über den Versuchsverlauf ändernde Materialeigenschaften (durch Erwärmung). Diese sollen hier nicht betrachtet werden, sondern allein die Störung der Kugelposition.

Ziel des Experiments ist es diese zu stabilisieren. Das heißt, daß eine ihr äquivalente, konstante Sollinduktivität vorgegeben werden muß. Deren Größe richtet sich nach dem gewählten Arbeitspunkt (für die oben angegebenen Werte zum Beispiel ca. 80 mH bei einem Kugel-Spule-Abstand von 3 cm). Die dieser Induktivität entsprechende Spannung wird der Regelung zugeführt (Abbildung 30). Sie muß konstant sein ($\Delta U_{\text{Isoll}} = 0$). Daß der Regelkreis bei Abweichungen trotzdem stabil bleibt, haben wir in Abschnitt 0 gesehen.

In diesem Abschnitt soll davon ausgegangen werden, daß die Sollwertspannung konstant ist. Folglich kann im um den Arbeitspunkt linearisierten Regelkreismodell der Wert der Führungsgröße null gesetzt werden (Abbildung 31).

Abweichungen vom Arbeitspunkt können schließlich durch Änderung der Kugelposition wegen äußerer Einflüsse auftreten. Die Wirkung dieser Störungen (ΔZ in Abbildung 49) sollen hier untersucht werden.

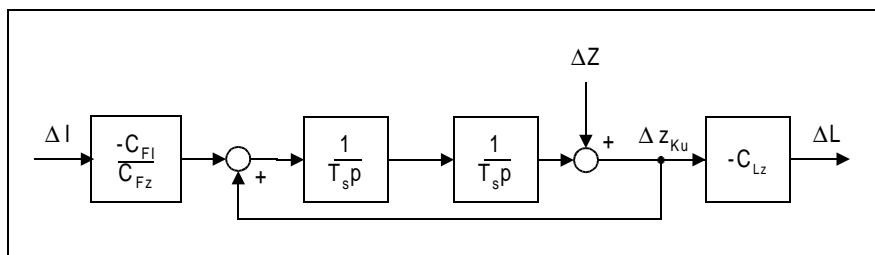


Abbildung 49 Störung der Kugelposition

Für die Störübertragungsfunktion (bezogen auf die Kugelposition) erhält man mit $\Delta U_{\text{Isoll}} = 0$

$$\frac{\Delta z_{Ku}}{\Delta Z} = \frac{1}{1 + G_r K_v K_s \frac{1}{T_s^2 - 1} K_m} \quad (0.68)$$

G_r ist die entsprechende Reglerübertragungsfunktion. Für die Regelung mit getrenntem Sollwertkanal lautet sie wegen verschwindender Sollgröße ebenso wie die des gewöhnlichen $PIDT_1$ -Reglers

$$G_r = G_I + G_{PDT_1} \quad (0.69)$$

Zunächst stellt sich natürlich die Frage, wie weit die Kugel vom Arbeitspunkt ausgelenkt werden kann unter der Voraussetzung, daß diese Störung trotzdem noch ausgegelt wird. Dies zu beantworten ist jedoch nicht ganz einfach, weil sich mit großen Auslenkungen auch die Systemparameter ändern. Dies wird im nächsten Abschnitt mit einbezogen.

Hier interessiert nur, ob eine Störung, die im System an der Stelle der Kugelposition ansetzt, ausgegelt wird. Deshalb gehen wir von kleinen Änderungen der Kugelposition aus und arbeiten mit konstanten Systemparametern.

Wir betrachten eine sprungartige Auslenkung der Kugel um 1 cm zur Zeit $t = 0.1$ s. Für die Störung gilt demnach

$$\Delta Z(t) = \pm 0.01 \cdot \sigma(t - 0.1) \quad (0.70)$$

Abbildung 50 zeigt den Verlauf der Kugelposition nach dieser Störung. Bereits nach 0.2 s hat die Kugel die Ruhelage wieder erreicht.

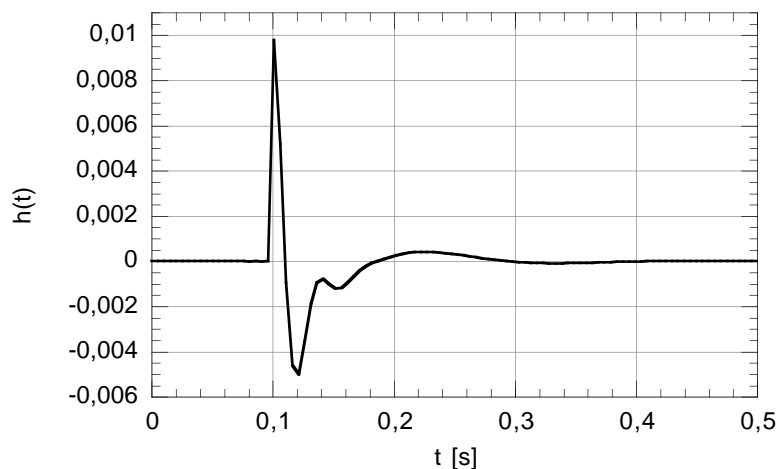


Abbildung 50 Verlauf der Kugelposition nach einer Störung

Auslenkungen in die andere Richtung werden wegen der angenommenen Linearität entsprechend ausgegelt.

Änderung der Systemparameter

In den bisherigen Ausführungen wurde vorausgesetzt, daß die Systemparameter K_s und T_s nach einmaliger Wahl des Arbeitspunktes unter allen Umständen konstant bleiben (linearisiertes System). Der Entwurf des Regelkreises baut auf diesen festen Werten auf. Das bedeutet, daß Stabilität für diese erreicht wird.

Im realen System ändern sich die Systemparameter und damit das Systemverhalten jedoch mit jeder Änderung von Kugelposition oder Spulenstrom. Da die Regelung mit an den Arbeitspunkt angepaßten Parametern arbeitet, kann dann Stabilität nicht mehr grundsätzlich gewährleistet werden.

Deshalb ist es interessant herauszufinden, in welchen Bereichen sich K_s und T_s bei vorgegebenen Reglerparametern ändern dürfen, ohne die Stabilität zu gefährden. Daraus kann geschlossen werden, wie weit sich Spulenstrom und Kugelposition vom Arbeitspunkt entfernen dürfen beziehungsweise wie weit dieser verschoben werden kann.

Aus Simulationen mit verschiedenen Systemparameterwerten ergeben sich bereits folgende Beobachtungen.

Eine Abweichung vom Arbeitspunkt in Richtung größerer K_s -Werte hat ein unruhigeres Einschwingverhalten zur Folge, ebenso wie eine Absenkung der Zeitkonstante T_s . Diese beiden Effekte führen erst bei großen Änderungen zur Instabilität des Kreises.

Gefährlicher ist eine Absenkung von K_s , weil dadurch die Kreisverstärkung unter einen kritischen Wert fallen kann. Gleichmaßen führt eine stärkere Verzögerung des Signaldurchlaufs (Erhöhung von T_s) zu Instabilität.

Um quantitative Aussagen über die Bereiche machen zu können, in denen sich Spulenstrom und Kugelposition bewegen dürfen, kann das Hurwitz-Kriterium verwendet werden.

Bezüglich Stabilität verhält sich der Regler - wie bereits in Abschnitt 0 bemerkt - wie ein PIDT₁-Regler.

Somit lautet die charakteristische Gleichung für die Lage der Pole

$$1 + \frac{K_v K_s K_v}{T_s^2 p^2 - 1} K_r \left(1 + \frac{1}{T_l p} + \frac{T_D p}{1 + T p}\right) = 0 \quad (0.71)$$

wobei wieder $T_l = K_r T_l'$ gilt. K_s und T_s müssen die daraus mittels des Hurwitz-Kriteriums abgeleitete Bedingung

$$K_s \cdot K_r K_v K_m (T_l T_D - T^2)(T + T_l) > T_s^2 \cdot T_l + T_l (T_l T_D - T^2) \quad (0.72)$$

erfüllen. Für den gegebenen Regelkreis ergibt sich zum Beispiel

$$0.13 \cdot K_s > 0.03 \cdot T_s^2 + 2.8 \cdot 10^{-5} \quad (0.73)$$

Erfüllen die Parameter diese Forderung, arbeitet der Regelkreis noch stabil.

Der daraus errechnete Stabilitätsbereich über Spulenstrom und Kugelposition ist in Abbildung 51 dargestellt.

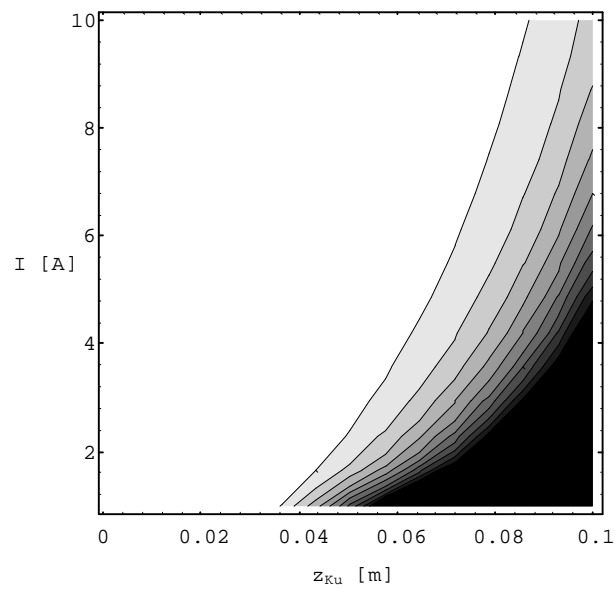


Abbildung 51 Stabilitätsbereich über Spulenstrom und Kugelposition (weißer Bereich) beim gegebenen Regler

Ergebnis

Die Untersuchungen haben gezeigt, daß sich die Kugel im Magnetfeld der Spule stabilisieren läßt.

Radiale Stabilität ist durch die Geometrie des Spulenfeldes gegeben (Abschnitt 0). Dies hat sich bereits beim Experimentieren mit Spule und Kugel gezeigt.

Für die horizontale Stabilisierung der Kugelposition wird eine Regelung benötigt. Da sich Änderungen der Kugelposition auf die Induktivität der Spule auswirken, kann diese als Regelgröße verwendet werden. Beeinflußt wird sie über den Spulenstrom.

Für den Reglerentwurf sind die Zusammenhänge im Kugel-Spule-System um einen Arbeitspunkt linearisiert worden (Abschnitt 0), sodaß auf die Theorie der linearen Regelungen zurückgegriffen werden konnte.

Der Regelkreis besteht neben dem Spule-Kugel-System aus dem Induktivitätsmeßglied, den Spannungsquellen für Sollwertvorgabe und Arbeitspunkteinstellung, dem Stellverstärker und dem Regler (Abschnitt 0). Als Regler erweist sich ein $PIDT_1$ -Regler mit getrenntem Sollwertkanal als geeignet, da er zum einen schnell ist und zum anderen die Regelgröße beim Ausregeln wenig überschwingt (Abschnitt 0). Die Simulation zeigt, daß er in der Lage ist Störungen der Kugelposition auszuregeln. Änderungen der Systemparameter über einen großen Bereich sind zulässig, sodaß aus der Linearisierung der Übertragungsfunktion des Systems keine Probleme bei der Regelung folgen werden. Die Regler können als Operationsverstärkerschaltungen aufgebaut werden.

Sind die Systemparameter in der Arbeit aus einem stark vereinfachten Modell gewonnen worden, so müssen sie bei Realisierung des Versuchs experimentell ermittelt werden. Das gilt ebenso für die Übertragungsfunktion des Induktivitätsmeßgliedes, die proportional angenommen worden ist.

Vorexperimente haben zudem gezeigt, daß bei angegebener Ausführung von Spule und Kugel (S.44) bereits ein Strom von ca. 2 A genügt, um die Kugel zu heben. Demnach gibt die Näherung (0.28) nur eine grobe Abschätzung der Kraft auf die Kugel.

Anhang

MATHEMATICA-Rechnungen

Im Folgenden sind die MATHEMATICA-Notebooks aufgelistet, mit deren Hilfe die für die Arbeit notwendigen Berechnungen durchgeführt wurden.¹¹

Bode-Diagramm und Sprungantwort

Dieses Notebook dient der Darstellung des Bode-Diagramms und der Sprungantwort $h(t)$ zu einer gegebenen Übertragungsfunktion $f[p]$.

```
Needs["Graphics`Graphics`"]
Needs["Calculus`LaplaceTransform`"]
Modify /: Modify[x_] := x      /; x < 0
Modify /: Modify[x_] := -360+x /; x > 0
fstep[t_] = InverseLaplaceTransform[ f[p]/p, p, t];
```

Übertragungsfunktion

```
f[p_] = 1/(1+0.5*p+p^2);
```

Frequenzgang

```
g[w_] = f[p]/.p->I*w;
```

Bode Diagramm

```
wmin = 0.01;
wmax = 10;

bode_b = LogLinearPlot[20*Log[ 10, Abs[g[w]] ], {w, wmin, wmax},
  GridLines->Automatic, Frame->True, PlotRange->All,
  FrameLabel->{"w [1/sec]", "|G(iw)| dB"}];

bode_p = LogLinearPlot[Modify[ 360/(2*Pi//N) * Arg[g[w]] ], {w, wmin,
  wmax}, GridLines->Automatic, Frame->True, PlotRange->All,
  FrameLabel->{"w [1/sec]", "Arg[G(iw)]"}];
```

Sprungantwort

```
tmax = 30;

sprung = Plot[fstep[t], {t, 0, tmax},
  Frame->True, GridLines->Automatic, PlotRange->All,
  FrameLabel->{"t [sec]", "h(t)"}];
```

¹¹ Für die meisten Grafiken lieferten diese Notebooks nur die Daten, die dann weiterverarbeitet wurden.

Stabilität im Spulenrandfeld

Mit diesem Notebook wurde überprüft, ob das Spulenrandfeld (0.12) der Stabilitätsbedingung (0.7) genügt.

Definitionen

```
werte = {m0->4*(Pi//N)*10^-7, n->1100, i->4.7, l->0.06, rSp->0.03};
```

Spulenfeld

```
b[r_,fi_,z_] = m0*Sqrt[4*m0/Pi]* i*n/l*  
  {-Integrate[Sin[k*rSp]/k* Exp[-k*z]* BesselJ[1,k*r], {k,0,100}] +  
    rSp*Integrate[Cos[k*rSp]* Exp[-k*z]* BesselJ[1,k*r], {k,0,100}],  
  0,  
  -Integrate[Sin[k*rSp]/k* Exp[-k*z]* BesselJ[0,k*r], {k,0,100}] +  
    rSp*Integrate[Cos[k*rSp]* Exp[-k*z]* BesselJ[0,k*r], {k,0,100}]};
```

Stabilitätsbedingung

Ableitungen

```
dbz[r_,fi_,z_] = m0*Sqrt[4*m0/Pi]* i*w/l*  
  {Integrate[Sin[k*rSp]* Exp[-k*z]* BesselJ[1,k*r], {k,0,100}] -  
    rSp*Integrate[k*Cos[k*rSp]* Exp[-k*z]* BesselJ[1,k*r], {k,0,100}],  
  0,  
  Integrate[Sin[k*rSp]* Exp[-k*z]* BesselJ[0,k*r], {k,0,100}] -  
    rSp*Integrate[k*Cos[k*rSp]* Exp[-k*z]* BesselJ[0,k*r], {k,0,100}]};
```

```
dbz2[r_,fi_,z_] = m0*Sqrt[4*m0/Pi]* i*w/l*  
  {-Integrate[k*Sin[k*rSp]* Exp[-k*z]* BesselJ[1,k*r], {k,0,100}] +  
    rSp*Integrate[k^2*Cos[k*rSp]* Exp[-k*z]*BesselJ[1,k*r], {k,0,100}],  
  0,  
  -Integrate[k*Sin[k*rSp]* Exp[-k*z]* BesselJ[0,k*r], {k,0,100}] +  
    rSp*Integrate[k^2*Cos[k*rSp]*Exp[-k*z]*BesselJ[0,k*r], {k,0,100}]};
```

Bedingung radial

```
linkeSeiteRad[r_,fi_,z_] = b[r,fi,z] . dbz2[r,fi,z];  
rechteSeiteRad[r_,fi_,z_] = dbz[r,fi,z] . dbz[r,fi,z]/2;  
listeRad = Table[{z,(linkeSeiteRad[0,0,z]-  
  rechteSeiteRad[0,0,z])/werte//N}, {z,0,0.1,0.005}];  
pRad = ListPlot[listeRad, PlotJoined->True, AxesLabel->{"z /m", "Delta /T"}];
```

Bedingung axial

```
rechteSeiteAx[r_,fi_,z_] = b[r,fi,z] . dbz2[r,fi,z];  
linkeSeiteAx[r_,fi_,z_] = -dbz[r,fi,z] . dbz[r,fi,z];  
listeAx = Table[{z, (linkeSeiteAx[0,0,z]-rechteSeiteAx[0,0,z])/werte//N},  
  {z,0,0.1,0.005}];  
pAx = ListPlot[listeAx, PlotJoined->True, AxesLabel->{"z /m", "Delta /T"}];
```


Induktivität der Spule und Kraft auf die Kugel

Die Induktivität der Spule bei Anwesenheit der Kugel kann mit unten stehendem Notebook berechnet werden. Die Beschreibung der zugrunde gelegten Modelle findet sich in Abschnitt 0.

Induktivität der Spule

Spulenfeld (Spule erstreckt sich von $z = 0$ bis $z = l$)

```
HiMax = i*n/l;  
HiSp[r_,z_] = {0, 0, HiMax};  
HaSp[r_,z_] = {0, 0, HiMax/2 * Exp[-z/rSp]};  
(** gilt für den Bereich  $z > 0$  **)
```

Kugelfeld (Kugel befindet sich bei $z = z_{Ku}$)

```
MKu[zKu_] = x*HaSp[0,zKu][[3]];  
HaKu[r_,Z_] = rKu^3/Sqrt[r^2+(z-zKu)^2]^3*MKu[zKu]*  
  {r*(z-zKu),  
   0,  
   (2*(z-zKu)^2-r^2)/3} /.z-zKu->Z;  
(** SUBSTITUTION  $Z=z-z_{Ku}$ ,  $x=mr-1$  **)
```

Superposition der Felder im Spulenvolumen

```
Hi[r_,Z_] = HiSp[r,Z] + HaKu[r,Z]
```

Induktivität

```
EnergDichte[r_,Z_] = (Hi[r,Z] . Hi[r,Z]) /(i^2*n^2/l^2)//Expand  
(**  $m_0/2$  später dranmultiplizieren,  $i^2*n^2/l^2$  ausklammern **)
```

```
EnergF[r_,Z_] = Integrate[r*EnergDichte[r,Z], {f,0,2*Pi//N}]/Expand  
EnergRF[Z_] = Integrate[EnergF[r,Z], {r,0,rSp}]  
EnergZRF[zKu_] = Integrate[EnergRF[Z], {Z,-l-zKu,-zKu}]  
(** RÜCKSUBSTITUTION **)
```

```
Energie[zKu_] = m0/2*(i^2*n^2/l^2)*EnergZRF[zKu]
```

```
Induktivität[zKu_] = 2*Energie[zKu]/i^2
```

Kraft auf die Kugel

```
F[zKu_,i_] = m0*(n*i/l)^2/8*Exp[-2*zKu/rSp]*Pi*rKu^2
```

Systemparameter

Das folgende Notebook berechnet die Systemparameter C_{Lz} , C_{FI} und C_{Fz} beziehungsweise K_s und T_s und stellt sie in Abhängigkeit von Spulenstrom und Kugelposition dar. Zu beachten ist, daß sich hierfür die Definitionen von Spuleninduktivität und Kraft auf die Kugel bereits im Kernel befinden müssen.

Mit dem letzten Block kann der Stabilitätsbereich für die Parameter gezeichnet werden (Abschnitt 0).

Werte

```
werte = {m0->4*(Pi//N)*10^-7, n->1100, l->0.06, rSp->0.03,
         rKu->0.03, x->1200};
iAP = 4.7;
zAP = 0.03;
(** Arbeitspunkt zAP m **)
```

Systemparameter

```
clz[zKu_] = D[Induktivität[zKu], zKu];
cfz[zKu_,i_] = D[F[zKu,i], zKu];
cfi[zKu_,i_] = D[F[zKu,i], i];

clz[zAP]/.werte//N
cfz[zAP, iAP]/.werte//N
cfi[zAP, iAP]/.werte//N

Ks[zKu_,i_] = -clz[zKu] * cfi[zKu,i] / -cfz[zKu,i];
Ts[zKu_,i_] = Sqrt[m / -cfz[zKu,i]];

Ks[zAP, iAP]/.werte//N
Ts[zAP, iAP]/.werte//N

Plot3D[Ks[zKu,i]/.werte, {zKu,0.001,0.1}, {i,1,10},
       PlotRange->All, ViewPoint->{4.265,7.343,2.982},
       AxesLabel->{"zKu [m]", "I [A]", "Ks [H/A]"}, ColorOutput->GrayLevel];
Plot3D[Ts[zKu,i]/.werte, {zKu,0.001,0.1}, {i,1,10},
       PlotRange->All, ViewPoint->{4.265,7.343,2.982},
       AxesLabel->{"zKu [m]", "I [A]", "Ts [s]"}, ColorOutput->GrayLevel];
```

Stabilitätsbereich

```
Gleichung = Ks[zKu,i]*2*133.056 - Ts[zKu,i]^2*60 - 0.05544
ContourPlot[Evaluate[Gleichung]/.werte,
            {zKu,0.001,0.1}, {i,1,10},
            FrameLabel->{"zKu [m]", "I [A]"}, ColorOutput->GrayLevel,
            PlotRange->{-10,0}];
```

Hurwitz-Kriterium

Die Hurwitz-Determinante und das zugehörige Gleichungssystem berechnet das folgende Notebook. Die Übertragungsfunktion des offenen Kreises wird in $f_0[p_]$ angegeben.

Übertragungsfunktion des offenen Kreises

```
f0[p_] = K/(Ts^2*p^2-1)
(** P-Regler **)
```

Hurwitz Kriterium

```
charG1 = Collect[(Denominator[f0[s]] + Numerator[f0[s]])//Expand, s]
coeffList = CoefficientList[charG1, s]//Reverse//Simplify
```

Determinante

```
dim = Length[coeffList]-1;
z1 = Table[2*n+1, {n,0,dim-1}];
hurDetRast = Table[RotateRight[z1,(n-Mod[n,2])/2] - Mod[n,2], {n,0,dim-1}];
hurDet = Table[Table[0, {n,1,dim}], {n,1,dim}];
For[i = 1, i <= dim, i++,
  For[j = 1, j <= dim, j++,
    elem = hurDetRast[[i,j]];
    If[elem <= dim,
      hurDet = ReplacePart[hurDet, coeffList[[elem+1]], {i,j}],
      hurDet = ReplacePart[hurDet, 0, {i,j}]]
  ]
]
TableForm[hurDet, TableSpacing->{1,2}, TableAlignments->{Center,Center}]
```

Gleichungssystem

```
glSys = Table[Minors[hurDet,n][[1,1]]//Simplify, {n,1,dim}]/TableForm
```

Regelkreissimulation

Zur Simulation des Regelkreises mit verschiedenen Reglern dienen die nachfolgenden Notebooks. Ausgegeben wird jeweils die Sprungantwort des Kreises.

```
Needs["Graphics`Graphics`"]
Needs["Calculus`LaplaceTransform`"]
fstep[x_] := InverseLaplaceTransform[x/p, p, t]
```

Werte

```
werteR = {Kr->500, Td->0.032, T->0.006, Ti->1/30};
werteSys = {Ks->0.002, Ts->0.04, Kv->2};
```

Übertragungsfunktion

System

```
fv[p_] = Kv;
fs[p_] = Ks/(Ts^2*p^2-1);
fSys[p_] = fv[p]*fs[p];
```

Regler

PDT1

```
fR[p_] = Kr*(1+Td*p/(1+T*p))//Together;
```

PI-PDT1

```
fR[p_] = Kr*(1+1/(Ti*p))*(1+Td*p/(1+T*p))//Together;
```

PIDT1

```
fR[p_] = Kr*(1+1/(Ti*p)+Td*p/(1+T*p))//Together;
```

Kreis

Offener Kreis

```
f0[p_] = fR[p]*fSys[p];
```

Geschlossener Kreis

```
fG[p_] = f0[p]/(1+f0[p]);
```

Sprungantwort

```
sR = Plot[Evaluate[fstep[(fG[p]/.werteSys/.werteR)//Simplify]],
  {t,0.00001,0.5}, Frame->True, GridLines->Automatic,
  FrameLabel->{"t [sec]", "h(t)"}, PlotRange->All, PlotPoints->500];
```

Für den Regler mit getrenntem Sollwertkanal erhält man eine andere Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises. Das Führungs- und Störübertragungsverhalten dieses Regelkreises wird mit dem folgenden Notebook berechnet.

```
Needs["Graphics`Graphics`"]
Needs["Calculus`LaplaceTransform`"]
fstep[x_] := InverseLaplaceTransform[x/p, p, t]
```

Werte

```
werteR = {Kr->500, Td->0.032, T->0.006, Ti->1/30};
werteSys = {Ks->0.002, Ts->0.04, Kv->2};
```

Übertragungsfunktion

System

```
fSys[p_] = Kv*Ks/(Ts^2*p^2-1);
```

Regler

```
fI[p_] = 1/(Ti*p);
(** I-Anteil **)
fR[p_] = Kr*(1+Td*p/(1+T*p))//Together;
```

Führungsübertragungsverhalten

```
fG[p_] = fSys[p]*(Kp*fR[p] + fI[p]) / (1 + fSys[p]*(fR[p] + fI[p]))
(** Faktor Kp für PDT1-Kanal **)
```

Sprungantwort

```
sR = Plot[Evaluate[fstep[(fG[p]/.werteSys/.werteR)//Simplify]],
  {t,0.00001,0.5}, Frame->True, GridLines->Automatic,
  FrameLabel->{"t [sec]", "h(t)"}, PlotRange->All, PlotPoints->500];
```

Störübertragungsverhalten

```
fG[p_] = 1 / (1 + fSys[p]*(fR[p] + fI[p]))
```

Sprungantwort

```
sR = Plot[Evaluate[0.01*fstep[(fG[p]*Exp[-0.1*p]/.werteSys/.werteR)//
  Simplify]],
  {t,0.00001,0.5}, Frame->True, GridLines->Automatic,
  FrameLabel->{"t [sec]", "zKu(t)"}, PlotRange->All, PlotPoints->500];
```

Literatur

- Bronstein, I.N./Semendjajew, K.A.: Taschenbuch der Mathematik
Verlag Harri Deutsch, Thun, 1989
- Clausert, H./Wiesemann, G.: Grundgebiete der Elektrotechnik, Bd.2
Oldenbourg Verlag, München, 1990
- Dölling, R.: Möglichkeiten der Pellet-Beschleunigung mit elektrischen und magnetischen
Feldern
Diplomarbeit, Frankfurt a.M., 1985
- Föllinger, O.: Regelungstechnik
Hüthig Verlag, Heidelberg, 1990
- Jackson, J.D.: Klassische Elektrodynamik
de Gruyter, Berlin, New York, 1981
- Lunze, J.: Grundlagen der Regelungstechnik
Vorlesungsskript, Hamburg, 1992
- Steinbuch, K.: Automat und Mensch
Springer-Verlag, Berlin, 1963
- Unbehauen, H.: Regelungstechnik I
Vieweg, Braunschweig, 1987
- Wolff, I.: Grundlagen und Anwendungen der Maxwellschen Theorie, Teil II
BI Hochschultaschenbücher Verlag, Mannheim, 1968
- Zirpel, M.: Regelungstechnik mit PC-Simulation
Franzis Verlag, Poing, 1994

Danksagung

Zuerst möchte ich Herrn Professor Klein dafür danken, daß er mir diese Arbeit ermöglicht hat. Außerdem danke ich Peter Hülsmann für seine stete Unterstützung im Verlauf meiner Arbeit. Claudius Peschke, Hans-Walter Glock, Wolfgang F.O. Müller, Matthias Schmidtke, Gerald Schreiber und Frank Marhauser, die übrigen Mitglieder der Arbeitsgruppe *Lineare Collider*, gaben mir wertvolle Anregungen und halfen gerne bei Problemen aller Art. Besonders erwähnt seien die regen Diskussionen mit Matthias Schmidtke, denen ich viele Ideen verdanke. Sie alle trugen zu der angenehmen Atmosphäre in der Arbeitsgruppe bei.